IL

NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. IX, N. 3 *Serie nona* 1 Marzo 1952

Curve teoriche di risonanza nell'interazione tra onde elettromagnetiche, per incidenza verticale nella ionosfera.

M. MOTZO

Istituto di Fisica Tecnica dell'Università, Centro di Studi di Radiopropagazione - Napoli

(ricevuto il 4 Dicembre 1951)

Riassunto. — Viene qui calcolato l'andamento del fenomeno di risonanza nell'interazione ionosferica tra due onde elettromagnetiche, nel caso in cui esse incidono verticalmente nella ionosfera. Le curve ottenute sono quelle di fig. 3. Il calcolo è stato condotto in analogia a quello di V. A. BAILEY, le cui curve di risonanza (fig. 1) furono calcolate per il caso di onde incidenti obliquamente sulla ionosfera.

Il fenomeno dell'interazione (*) delle onde elettromagnetiche nella ionosfera è interessante non solo in quanto, da un punto di vista teorico, ci obbliga a prendere in considerazione la non linearità delle equazioni dell'elettromagnetismo, ma anche perchè esso costituisce uno dei più efficaci strumenti di indagine delle proprietà chimiche ed elettriche di quella parte dell'alta atmosfera compresa tra gli 85 ed i 95 km circa dalla superficie terrestre.

V. A. BAILEY (1), a cui è dovuta una teoria dettagliata su questo feno-

(*) Come è noto, date due onde elettromagnetiche attraversanti una stessa zona ionosferica e quindi ivi entrambe parzialmente assorbite, può avvenire, in particolari condizioni, che la modulazione di una di esse (disturbatrice) risulti, all'uscita dalla ionosfera, impressa sull'altra (ricercata), supposta per semplicità non modulata in partenza; ciò si può rilevare ad un ricevitore accordato sulla frequenza dell'onda ricercata.

(1) V. A. BAILEY: *Phil. Mag.*, **23**, 929 (1937); **26**, 425 (1938).

meno, ha discusso in particolare il caso in cui la frequenza della portante della stazione disturbatrice venisse a trovarsi in un intorno della frequenza giromagnetica locale (frequenza di rotazione degli elettroni nella ionosfera soggetti al campo magnetico terrestre); per questo caso prevedendo, per la modulazione impressa sulla ricercata, valori molto più elevati dei soliti per il verificarsi di un fenomeno di risonanza (girointerazione).

La realizzazione sperimentale ([2]) della girointerazione, nelle condizioni previste dal BAILEY, cioè di *incidenza obliqua* della disturbatrice sulla ionosfera, presenta però in generale notevoli difficoltà, in quanto richiede due trasmettitori ed una stazione ricevente situati a diversi chilometri di distanza (ed i relativi collegamenti).

Nel 1949 CUTOLO ebbe perciò l'idea di tentare di ottenere la girointerazione emettendo sulla verticale ([3]) le onde occorrenti per la generazione del fenomeno.

Fu possibile così osservare per la prima volta, sia pur solo qualitativamente, il fenomeno di girointerazione, disponendo le varie stazioni a distanza di pochi chilometri tra di loro.

È da notare che con questo metodo è stato possibile rilevare il fenomeno sia di giorno che di notte, mentre per incidenza obliqua (caso previsto dal BAILEY), ciò è possibile solo di notte.

Scopo del presente lavoro è ora di prevedere teoricamente l'andamento del fenomeno di risonanza nell'interazione tra due onde elettromagnetiche, per penetrazioni successive nella ionosfera, per *incidenza verticale*.

Per chiarezza e allo scopo di precisare le notazioni che verranno qui usate si richiamano quei risultati della teoria del BAILEY che sono interessanti ai nostri fini.

Per calcolare l'andamento di questo fenomeno di risonanza (nel caso d'incidenza a 45° dell'onda disturbatrice), questo autore valutò l'azione della componente straordinaria dell'onda disturbatrice nella regione inferiore dello strato E, e calcolò, attraverso procedimenti che qui per brevità è necessario omettere, il lavoro medio $\overline{w}$ compiuto dal campo elettrico di quest'onda su un elettrone nell'intervallo fra due urti consecutivi di esso contro molecole gassose; ottenendo:

$$\overline{w} = \tau a_s Z^2 \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}{\nu^2 + \sigma^2 - \nu^2 p' \dfrac{\sigma}{\Omega}},$$

dove $\tau = e^2/m$; Z = valore efficace del campo elettrico dell'onda nel punto di incidenza;

([2]) M. CUTOLO, R. FERRERO e M. MOTZO: *Alta Frequenza*, **19**, 3 (1950); *Nature*, **160**, 834 (1947).

([3]) M. CUTOLO: *Alta Frequenza*, **18**, 169 (1949).

φ = angolo tra il vettore campo elettrico dell'onda e il campo magnetico terrestre;

ν = frequenza di collisione degli elettroni, secondo la distribuzione di Martyn $= 1{,}1 \cdot 10^6 \exp[-y \cdot 10^{-4}]$; dove y = altezza verticale nello strato al di sopra del livello 0 supposto a 90 km di altezza;

$$\sigma = \omega - \Omega \; ;$$

dove $\omega/2\pi$ = frequenza dell'onda (disturbatrice);

$\Omega/2\pi$ = frequenza giromagnetica locale;

$$p' = \frac{\operatorname{tg}^2 \vartheta + \operatorname{cotg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \vartheta + 2} - \frac{\tau N(1 + \cos^2 \vartheta)}{2\varepsilon_0 \nu^2} \, ,$$

dove ϑ = angolo tra la direzione di propagazione dell'onda ed il campo magnetico terrestre;

N = concentrazione elettronica, secondo Martyn $= 10^6 \cdot \exp[y \cdot 10^{-3}]$;

ε_0 = costante dielettrica del vuoto:

a_s è definito dalla relazione:

$$\lg_{10} a_s = -2 \int_0^s k \, \mathrm{d}s = -2k_1 \left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) \int_0^y \frac{N\nu}{\nu^2 + \sigma^2} \, \mathrm{d}y \, ,$$

dove k = coefficiente di assorbimento dello strato per l'onda di pulsazione ω ed $\alpha = \operatorname{arctg} \cos \vartheta$.

Dall'espressione di $\overline{w}$ per vari valori della penetrazione y dell'onda ricercata nella ionosfera e per una variazione intorno alla frequenza giromagnetica locale della frequenza $\omega/2\pi$, il Bailey tracciò delle curve di risonanza valide per il valore della frequenza giromagnetica a Londra e, come si è detto, per un'incidenza della disturbatrice sulla ionosfera di 45° (fig. 1), dove sulle ascisse sono le lunghezze d'onda e sulle ordinate l'indice $N\nu\overline{w}$ detto dal Bailey « indice di interazione » in quanto risulta proporzionale alla modulazione impressa M.

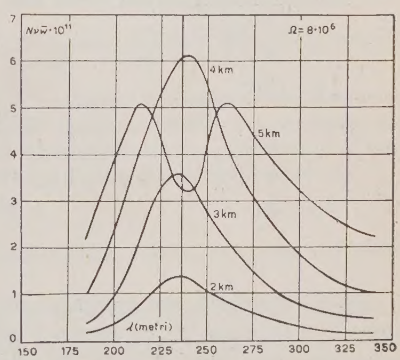


Fig. 1.

L'andamento della curva di risonanza a due massimi (che si ottiene quando la ricercata penetra 5 km nello strato E) è stato sperimentalmente verificato (2) risultando in linea di massima esatto, nonostante qualche differenza nell'appuntimento dei massimi.

La simmetria dei massimi di questa curva intorno alla frequenza giromagnetica permette di ricavare il valore di quest'ultima e, come è noto, dal valore della frequenza giromagnetica Ω si può calcolare il valore dell'intensità totale H del campo magnetico terrestre nella ionosfera, mediante la

$$\Omega = \frac{\mu_0 \, eH}{m} .$$

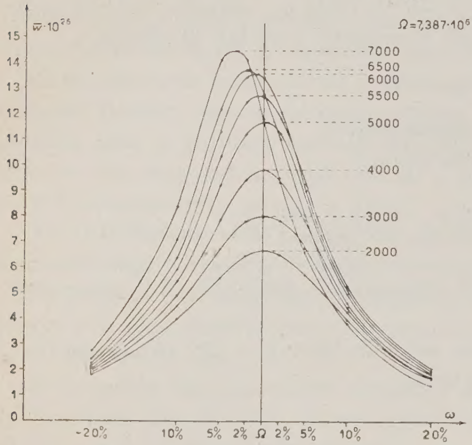


Fig. 2. - Andamento della funzione $\bar{w}$, lavoro medio compiuto dal campo elettrico dell'onda su un elettrone nell'intervallo tra due urti consecutivi, per successive penetrazioni nella ionosfera.

Nel nostro caso si è calcolato il lavoro medio $\bar{w}$ e quindi il prodotto $N\nu\bar{w}$ « indice di interazione » proporzionale alla modulazione impressa M.

I valori che si sono assunti per eseguire questi calcoli sono in particolare: $\Omega = 7{,}387 \cdot 10^6$ (cioè 1 176 kHz/s, pari a 255 m = = frequenza giromagnetica calcolata per il cielo di Napoli);

$Z = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$ V/m calcolando un'irradiazione uniforme sulla semisfera a centro nell'antenna, potenza circa 800 W.

$$\varphi = 60^\circ \qquad \sigma = \left\{ \begin{array}{r} 0\% \\ \pm\ 2\% \\ \pm\ 5\% \\ \pm 10\% \\ \pm 20\% \end{array} \right. \Omega \qquad y = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5{,}5 \\ 6 \\ 6{,}5 \\ 7 \end{array} \right. \cdot 10^3 \text{ m} .$$

$$\vartheta = 30^\circ$$

Poichè il calcolo non presenta particolari difficoltà concettuali, pur essendo alquanto laborioso, se ne danno i risultati direttamente nelle tabelle e nelle curve tracciate (figg. 2 e 3). Si nota immediatamente che non si ritrova la curva a due gobbe, e si ha invece per progressive penetrazioni lo spostamento del massimo verso le frequenze inferiori a quella giromagnetica.

La ragione ne è immediata. Nella espressione di $\bar{w}$, al passaggio dall'incidenza obliqua a quella verticale cambiano i parametri geometrici φ e ϑ, e quindi cambia essenzialmente il p'. Ora al denominatore di $\bar{w}$ il termine $\nu^2 p'(\sigma/\Omega)$

è positivo o negativo a seconda che si considerino frequenze superiori o rispettivamente inferiori alla frequenza giromagnetica.

L'intero termine diventa però trascurabile con p' ed è chiaro che in questo caso i valori della funzione $\overline{w}$ sono simmetrici o quasi intorno alla frequenza giromagnetica (ciò si verifica nel caso d'incidenza obliqua fino a circa km 5 di penetrazione). Nel caso d'incidenza verticale, invece, la simmetria di $\overline{w}$ intorno alla frequenza giromagnetica scompare all'aumentare della penetrazione nella ionosfera e quindi si ha il progressivo allontanarsi del massimo della curva dalla frequenza giromagnetica verso frequenze inferiori, come risulta dalla fig. 3.

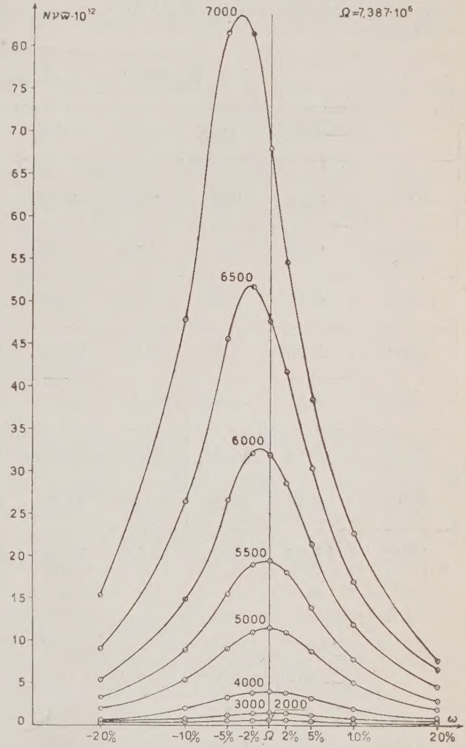


Fig. 3. – Curve di risonanza nell'interazione tra onde elettromagnetiche per incidenza verticale e per penetrazioni progressive al di sopra del livello iniziale dello strato E.

È necessario mettere in evidenza che il calcolo è stato condotto attenendosi sempre alle ipotesi fatte dal BAILEY nella sua teoria originaria sull'andamento delle varie funzioni utilizzate, anche quando risultati teorici o sperimentali più recenti indicassero un andamento un po' diverso. Ciò affinchè le curve calcolate per incidenza verticale fossero paragonabili con quelle per incidenza obliqua ottenute dal BAILEY (anche perchè queste ultime si sono dimostrate alla luce dell'esperienza esatte con una sufficiente approssimazione).

Per quello che riguarda, ad esempio, la funzione $N(y)$ recenti risultati (4) sembrano dare un gradiente di ionizzazione crescente per un fattore 1,7 per km, mentre secondo la distribuzione esponenziale del Martyn, adottata dal BAILEY, questo fattore risulta di 2,7 per km. Così per la frequenza di collisione, risul-

(4) I. J. SHAW: *Proc. Phys. Soc.*, **64**, 5 (1951).

tati sperimentali (4) indicano, ad esempio, a km 92 un valore $\nu = 1{,}4 \cdot 10^6$, mentre dalla distribuzione di Martyn si deduce alla stessa altezza $\nu = 0{,}89 \cdot 10^6$.

Ancora il fattore di perdita di energia G, adoperato dal Bailey per il calcolo di $\overline{w}$ e assunto come $2{,}6 \cdot 10^{-3}$, risulta da recenti determinazioni (5) $1{,}3 \cdot 10^{-3}$.

Tabella I. – *Valori di* $N_\nu \overline{w} \cdot 10^{12}$.

	−20%	−10%	−5%	−2%	Ω	+ 5%	+ 5%	+10%	+20%
2000	0,11	0,25	0,36	0,42	0,43	0,42	0,37	0,26	0,11
3000	0,29	0,7	1,08	1,26	1,3	1,26	1,08	0,71	0,3
4000	0,77	1,93	3,13	3,75	3,9	3,75	3,13	1,93	0,77
5000	1,95	5,31	9,02	10,93	11,45	10,93	8,7	5,03	1,95
5500	3,21	8,86	15,47	18,93	19,38	18	13,86	7,82	2,92
6000	5,25	14,94	26,63	32,05	31,91	28,67	21,42	11,9	4,47
6500	8,97	26,32	45,89	51,85	47,89	41,89	30,31	17,04	6,63
7000	15,23	47,96	81,73	81,68	68,06	54,85	38,34	22,88	7,82

Tabella II. – *Valori di* $\overline{w} \cdot 10^{26}$.

	−20%	−10%	−5%	−2%	Ω	+2%	+5%	+10%	+20%
2000	1,75	3,86	5,6	6,46	6,64	6,46	5,72	3,98	1,79
3000	1,83	4,33	6,7	7,8	8	7,8	6,71	4,44	1,87
4000	1,94	4,85	7,86	9,41	9,78	9,41	7,86	4,85	1,94
5000	2	5,43	9,21	11,17	11,7	11,17	8,89	5,14	2
5500	2,12	5,84	10,20	12,48	12,78	11,87	9,14	5,16	1,93
6000	2,21	6,28	11,19	13,47	13,41	12,05	9	5	1,88
6500	2,38	6,98	12,17	13,75	12,7	11,11	8,04	4,52	1,76
7000	2,63	8,28	14,11	14,10	11,75	9,47	6,62	3,95	1,35

(5) L. G. H. Huxley e A. A. Zaazou: *Proc. Roy. Soc.*, A **196**, 402 (1948).

Sembra comunque che queste differenze porterebbero ad una variazione piuttosto quantitativa che qualitativa nell'andamento del fenomeno.

Come risulta immediatamente dalle curve tracciate sembrerebbe che non si possano ottenere indicazioni precise sul valore della frequenza giromagnetica.

L'entità del fenomeno sembrerebbe invece notevole e progressivamente crescente almeno fino ad un certo punto, con la penetrazione dell'onda ricercata nello strato E.

Si ringraziano vivamente il dott. M. Cutolo per il suo cortese interessamento e l'ing. M. Carlevaro per aver suggerito il tema del lavoro.

SUMMARY

As it is well known, when two electromagnetic waves cross the same ionospheric region and are therefore both partially absorbed there, it might happen, under particular conditions, that the modulation of the one of them (disturbing wave) results, at the return from the ionosphere, impressed on the other (wanted wave) which is supposed, for simplicity, not modulated at the transmitter; this fact might be noticed at a receiver tuned to the frequency of the wanted wave. If, moreover, the frequency of the disturbing wave is varied in a range around the local gyromagnetic frequency, the modulation impressed on the wanted wave might undergo an increase due to a resonance effect (gyrointeraction). V. A. Bailey developed the theory of gyrointeraction and calculated, for the case of oblique incidence, the curves of fig. 1. This theory of gyrointeraction has been here extended to the case of vertical incidence, having some experimental evidence of the possibility of obtaining gyrointeraction also with vertically incident waves. The resonance curves which were obtained are shown in fig. 3, and it is evident that only one type of curve (with one maximum) is obtained in this case.

IL NUOVO CIMENTO Vol. IX, N. 3 1 Marzo 1952

Note on the Diffraction of Light by a Finite Number of Centres Distributed at Random.

C. C. Grosjean

Natuurkundig Laboratorium Universiteit - Gent, Belgio

(ricevuto il 29 Dicembre 1951)

Summary. — After having shown, how a particular problem of light diffraction can be reduced to a purely mathematical problem in the Fresnel representation, the author considers the most general case and establishes exact recurrence relations involving the defined probability functions. These equations are solved exactly and in the isotropic case, the solutions are identical with those of the random flight theory. In practice however, the solutions are only applicable to the cases that N, the number of centres, is small. For large N, the solutions can be approximated by Gaussian curves. Finally, the results are applied to a one- and a two-dimensional problem.

Introduction.

In a few publications, G. Toraldo di Francia [1] has studied problems of light diffraction by a screen of a finite size, which is perforated by a large number N of apertures, distributed at random. So far only approximate results valid for large N have been obtained in the form of Gauss-type curves. These approximations are certainly precise enough for very large N. However, we wish to prove that the problem can be solved exactly for all values for $N \geqslant 1$. First of all, we explain how a problem of this kind can be reduced to a purely mathematical one and after that, we deduce the exact solution in the most general case.

(1) G. Toraldo di Francia: *Rend. Acc. Naz. Linc.*, **2**, 186 (1947); **3**, 568 (1947); **4**, 730 (1948).

Statement of the problem.

In the first paper TORALDO has studied the following one-dimensional problem:

A screen AB situated on the Y-axis from $-a$ to $+a$ is perforated by N small apertures distributed at random.

Coherent light is arriving in the positive X-direction (fig. 1) and is scattered by the small apertures. We wish to calculate the intensity and the

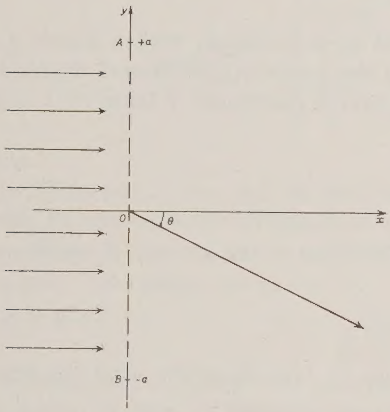


Fig. 1.

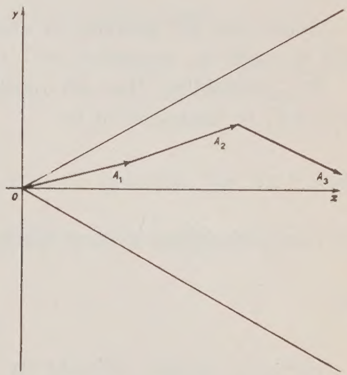


Fig. 2.

phase angle Φ of the light in the direction θ. For $\theta = 0$, there will be no phase differences and therefore, the amplitude is the sum of the amplitudes for each individual aperture. The phase angle Φ is zero with respect to the phase in the origin O. For $0 < \theta \leqslant \pi/2$ (²), we get phase differences and therefore, due to the interference-effect, the amplitude and the phase angle Φ will not be fixed. We wish to study the probability distribution of all possible amplitudes and phase angles.

With each aperture, we can associate a « light vector » in the Fresnel representation. We need not suppose that all these vectors are equal in length. Therefore we represent their lengths by

$$A_1\,,\quad A_2\,,\;\ldots,\quad A_n\,,\;\ldots,\quad A_N \qquad (N = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

depending on the size of the apertures.

(²) Due to the symmetry of the problem, the results are the same for $-\theta$ as for $+\theta$. Therefore, we let θ vary in $(0, \pi/2)$, choosing it for instance as on fig. 1.

For an aperture situated at Y, the phase angle with respect to $Y = 0$ is

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} Y \sin\theta \qquad (-a \leqslant Y \leqslant a). \tag{2}$$

The maximum and minimum angles are given by

$$\pm\alpha = \pm \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta\,, \tag{3}$$

so that

$$-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha\,. \tag{4}$$

Hence the n^{th} aperture is characterized by a vector $\boldsymbol{A}_n$ with a length A_n and an angle φ_n measured with respect to the x-axis of the Fresnel diagram.

The probability that an aperture will have a coordinate Y between Y and $Y + \mathrm{d}Y$, is supposed to be

$$\frac{\mathrm{d}Y}{2a}\,, \qquad (-a \leqslant Y \leqslant a). \tag{5}$$

The probability that φ has a value between φ and $\varphi + \mathrm{d}\varphi$ is therefore

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\alpha}\,, \qquad (-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha). \tag{6}$$

However, angles differing by a quantity $2k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) are indistinguishable in the Fresnel diagram. For several purposes we wish to reduce φ to its definition between $-\pi$ and $+\pi$, so that we can define the probability

$$p(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\,, \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi), \tag{7}$$

that the new definition of the phase angle would lie between φ and $\varphi + \mathrm{d}\varphi$.

The choice of $\mathrm{d}\varphi/2\pi$ as element instead of $\mathrm{d}\varphi$ is a matter of convenience: we have preferred to normalize the element. It is easy to find the probability distribution $p(\varphi)\cdot\mathrm{d}\varphi/2\pi$ for each value of α. For $\alpha < \pi$, it is clear that we should obtain

$$p(\varphi)\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{2\alpha} & (-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha) \\[2ex] 0 & (-\pi \leqslant \varphi < -\alpha;\ \alpha < \varphi \leqslant \pi)\,. \end{cases} \tag{8}$$

For $\alpha = \pi$, the distribution is isotropic.

For $\alpha > \pi$, certain vectors will be generated two or more times by different angles φ with the same definition between $-\pi$ and π. The probabi-

lity will of course be a few times higher than the value in (6) for these vectors, e.g.:

for $\pi < \alpha < 2\pi$

$$(8') \qquad p(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{2\alpha} & -(2\pi - \alpha) < \varphi < (2\pi - \alpha) \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{\alpha} & (-\pi \leqslant \varphi \leqslant -(2\pi - \alpha); \ \ (2\pi - \alpha) \leqslant \varphi \leqslant \pi) \end{cases}$$

for $2\pi < \alpha < 3\pi$

$$(8'') \qquad p(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{d\varphi}{\alpha} & -(\alpha - 2\pi) \leqslant \varphi \leqslant (\alpha - 2\pi) \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{\alpha} & \text{otherwise} \end{cases}$$

etc.

However, in the way we shall solve the general problem, the final result will be the same for all values of α.

When $\theta = 0$, we get $\alpha = 0$ and all the phase-vectors are situated on the x-axis. Of course, we have

$$\Phi = 0 \, ,$$

and the total amplitude is

$$(9) \qquad \mathcal{A}_0 = \sum_{n=1}^{N} A_n \, .$$

The intensity is at its maximum

$$(10) \qquad \dot{I}_0 = \mathcal{A}_0^2 \, .$$

Solution of the general problem.

Suppose we have to add a number of vectors

$$\boldsymbol{A}_1 , \quad \boldsymbol{A}_2 , \ \ldots , \quad \boldsymbol{A}_n , \ \ldots$$

in the xy-plane, starting from the origin O. We are given the probability:

$$(11) \qquad f_n(l) \cdot dl \, , \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

that the vector $\boldsymbol{A}_n$ has a length between l and $l + dl$. Each vector forms a certain angle φ with the positive x-axis and we measure it so that it belongs to the interval $(-\pi, \pi)$. We are given the probability distributions of the

angles φ, namely

$$p_n(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}, \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi) \tag{12}$$

where we have normalized the element $d\varphi$ to unity.

We leave the functions $f_n(l)$ and $p_n(\varphi)$ arbitrary.

The problem is to find the explicit form of

$$P_n(r, \psi) \cdot r\, dr\, d\psi, \qquad (r \geqslant 0;\ -\pi \leqslant \psi \leqslant \pi)\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{13}$$

expressing the probability that the endpoint of the sum

$$\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_n,$$

lies in the plane element $(r, r + dr;\ \psi, \psi + d\psi)$.

For $n = 1$, it is evident that

$$P_1(r, \psi) r\, dr\, d\psi = f_1(r) \cdot p_1(\psi) \cdot dr\, \frac{d\psi}{2\pi}. \tag{14}$$

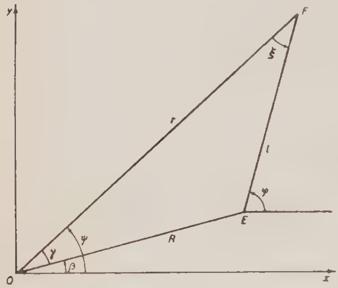


Fig. 3.

Fig. 3 shows the triangle which we need to establish the relation between P_n and P_{n+1}. We write the probability that the n^{th} vector ends in $(R, R + dR)$ $(\beta, \beta + d\beta)$ and we multiply this by the distribution for the $(n+1)^{\text{th}}$ vector; we replace the element

$$l\, dl\, d\varphi$$

by

$$r\, dr\, d\psi,$$

and after integration for all values of β and R, we get

$$\boxed{P_{n+1}(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \iint_G P_n(R, \beta) \cdot p_{n+1}(\varphi) \cdot f_{n+1}(l) \cdot \frac{R\, dR\, d\beta}{l}}, \tag{15}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

where

$$R \cos \beta + l \cos \varphi = r \cos \psi,$$

$$R \sin \beta + l \sin \varphi = r \sin \psi,$$

and where G represents the whole plane in which E can vary.

We take F as new origin and FO as positive direction to measure the angle ξ. The positive direction of rotation is chosen as usual. To each po-

sition of E there corresponds a length l and an angle ξ between 0 and 2π. We get that

$$R\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\beta = l\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\xi\,,$$

and hence

$$(16)\qquad P_{n+1}(r,\psi) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G} P_n(R,\beta)\cdot p_{n+1}(\varphi)\cdot f_{n+1}(l)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\xi = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty} P_n(R,\beta)\cdot p_{n+1}(\varphi) f_{n+1}(l)\,\mathrm{d}l.$$

We expand $P_n(r,\psi)$ as a Fourier-series in the interval $(-\pi,\pi)$ and we represent the radial parts by their Hankel-transforms:

$$(17)\quad P_n(r,\psi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[ik\psi]\int_0^{\infty} g_n^{(k)}(u)\cdot \dot{J}_k(ru)\,\mathrm{d}u \quad (-\pi\leqslant\psi\leqslant\pi;\ n=1,2,3,\ldots).$$

Eq. (16) becomes:

$$(18)\qquad P_{n+1}(r,\psi) = \\ = \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} g_n^{(k)}(u)\,\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi\int_0^{\infty}\dot{J}_k(Ru)\cdot\exp[ik\beta]p_{n+1}(\varphi)f_{n+1}(l)\,\mathrm{d}l\,.$$

Now, we apply an addition theorem for the Bessel functions (³). In the triangle of fig. 4, it is proved that

$$(19)\quad \exp[\pm ik\gamma]\cdot\dot{J}_k(Ru) = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\dot{J}_{k+m}(ru)\cdot\dot{J}_m(lu)\cdot\exp[\pm im\xi]\,,$$

where γ and ξ are the positive angles of this triangle. In the way we have defined ξ, two cases can be considered:

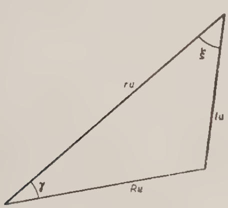


Fig. 4.

$$\begin{cases} 0\leqslant\xi\leqslant\pi\,, \\ \pi\leqslant\xi\leqslant 2\pi\,. \end{cases}$$

In the first case, ξ is the angle as we should use it in (19). In the second case, $(2\pi-\xi)$ is the angle which must be chosen (fig. 5).

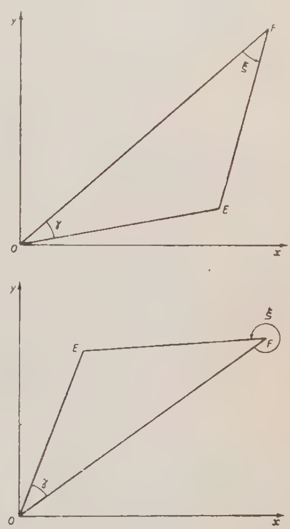


Fig. 5.

(³) Cfr. G. N. WATSON's: *Theory of Bessel functions* (1948), p. 360-361

In the way we have defined the angles ψ and β (namely measured between $-\pi$ and π), care must be taken which combination of ψ and β gives the right value for the positive angle γ, as we need it in (19).

This analysis is not very difficult and it turns out that the result is unique in all the cases. The relation is

$$\exp[ik\beta]\exp[-ik\psi]\dot{J}_k(Ru) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{J}_{k+m}(ru)\cdot \dot{J}_m(lu)\cdot \exp[-im\xi]\,. \tag{20}$$

Therefore, we get

$$P_{n+1}(r,\psi) = \tag{21}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[ik\psi]\int_0^\infty g_n^{(k)}(u)\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\xi\int_0^\infty \mathrm{d}l\Big[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[-im\xi]\dot{J}_{k+m}(ru)\dot{J}_m(lu)\times$$
$$\times\, p_{n+1}(\varphi)\cdot f_{n+1}(l)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp[ik\psi]\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty g_n^{(k)}(u)\,\mathrm{d}u\cdot\Big[\dot{J}_{k+m}(ru)\cdot F_{n+1}^{(m)}(u)\int_0^{2\pi}\exp[-im\xi]p_{n+1}(\varphi)\,\mathrm{d}\xi\Big],$$

where

$$F_n^{(m)}(u) \equiv \int_0^\infty f_n(l)\cdot \dot{J}_m(lu)\,\mathrm{d}l\,, \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

We introduce the Fourier-expansion of $p_n(\varphi)$ in $(-\pi,\pi)$

$$p_n(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_n^{(s)}\cdot\exp[is\varphi]\,. \tag{22}$$

In our case, φ is related to the sum $\xi+\psi$, so that we have either

$$\varphi = \xi + \psi\,,$$

or

$$\varphi = \xi + \psi - 2\pi\,.$$

Therefore:

$$\int_0^{2\pi}\exp[-im\xi]p_{n+1}(\varphi)\cdot\mathrm{d}\xi = \tag{23}$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_{n+1}^{(s)}\cdot\exp[is\psi]\int_0^{2\pi}\exp[i(s-m)\xi]\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\cdot c_{n+1}^{(m)}\cdot\exp[im\psi]\,,$$

and

(24) $P_{n+1}(r, \psi) =$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[ik\psi] \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n+1}^{(m)} \exp[im\psi] \int_0^\infty g_n^{(k)}(u) \cdot \dot{J}_{k+m}(ru) \cdot F_{n+1}^{(m)}(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \exp[ik'\psi] \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n+1}^{(m)} \int_0^\infty g_n^{(k'-m)}(u) \cdot F_{n+1}^{(m)}(u) \cdot \dot{J}_{k'}(ru)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \exp[ik'\psi] \int_0^\infty \dot{J}_{k'}(ru)\,\mathrm{d}u \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n+1}^{(m)} g_n^{(k'-m)}(u) \cdot F_{n+1}^{(m)}(u)\right].$$

Therefore, due to the uniqueness of a Fourier-expansion and the reversibility of the Hankel-integrals, we find:

$$\boxed{g_{n+1}^{(k)}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{n+1}^{(m)} F_{n+1}^{(m)}(u) \cdot g_n^{(k-m)}(u)} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{25}$$

The functions $g_1^{(k)}(u)$ can be easily calculated from (14). Expanding $p_1(\psi)$, we get

$$P_1(r, \psi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_1^{(k)} \exp[ik\psi] f_1(r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\psi. \tag{26}$$

Therefore, we should have

$$r \int_0^\infty g_1^{(k)}(u) \cdot \dot{J}_k(ru)\,\mathrm{d}u = \frac{c_1^{(k)}}{2\pi} \cdot f_1(r), \tag{27}$$

and the inverse is

$$g_1^{(k)}(u) = \frac{c_1^{(k)} u}{2\pi} \int_0^\infty f_1(r) \cdot \dot{J}_k(ru)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2\pi} c_1^{(k)} u \cdot F_1^{(k)}(u). \tag{28}$$

By the use of our recurrence relation, our final result can be written as:

$$\boxed{P_N(\mathcal{A}, \Phi) \cdot \mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathrm{d}\Phi = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp[ik\Phi] \int_0^\infty g_N^{(k)}(u) \cdot \dot{J}_k(\mathcal{A}u)\,\mathrm{d}u\right] \mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathrm{d}\Phi} \tag{29}$$

$(N = 1, 2, 3, \ldots),$

where we have

$$(30)\quad g_N^{(k)}(u) = \frac{u}{2\pi} \cdot \prod_{s=1}^{N-1} \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} [c_s^{(m_s-m_{s-1})} F_s^{(m_s-m_{s-1})}(u)] \cdot c_N^{(k-m_{N-1})} F_N^{(k-m_{N-1})}(u)\,,$$

with $m_0 \equiv 0$.

This is the exact probability that the endpoint of the

$$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{A}_n$$

vector sum would lie in the element $(\mathcal{A},\ \mathcal{A} + \mathrm{d}\mathcal{A})$, $(\Phi,\ \Phi + \mathrm{d}\Phi)$.

The coefficients $c_n^{(k)}$ are given by

$$(31)\qquad c_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(\varphi) \cdot \exp[-ik\varphi]\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

In the isotropic case, $p_n(\varphi) = 1$ and we find

$$(32)\qquad c_n^{(0)} = 1\,; \qquad c_n^{(k)} = 0\,, \qquad (k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots)$$

and it is easy to prove that

$$g_N^{(k)}(u) = 0\,, \qquad \text{for}\quad k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$$

$$g_N^{(0)}(u) = \frac{u}{2\pi} \cdot \prod_{s=1}^{N} F_s^{(0)}(u)\,.$$

Therefore

$$(33)\qquad P_N(\mathcal{A}, \Phi) \cdot \mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathrm{d}\Phi = \mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi}{2\pi} \int_0^{\infty} u J_0(\mathcal{A} u) \cdot \prod_{s=1}^{N} F_s^{(0)}(u) \cdot \mathrm{d}u\,.$$

This result is in agreement with the theory of random flights.

In the case that the coefficients $c_n^{(k)}$ are zero or negligible for $k \geqslant k_0$, the infinite series in (29) and (30) become finite sums and when N is small, it is possible to find an exact integral representation of $P_N(\mathcal{A}, \Phi)$. However, in many physical cases, N is very large and it is necessary to find the asymptotic expression to which (29) tends for $N \to \infty$. The simplest way of getting the formula, is to apply a certain theorem appearing in the theory of errors. This is very similar to a calculation in Toraldo's third publication. Suppose we have to add N vectors in the xy-plane and we know the probability distri-

butions

$$\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \tag{34}$$

that the projections of the n^{th} vector would have, resp. a length between x and $x + \mathrm{d}x$, and between y and $y + \mathrm{d}y$. Whatever the functions $\tilde{\omega}_n$ are, it is always true that for sufficiently large N, the probability distribution $P_N(X, Y)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y$ corresponding to the sum of the first vector tends to

$$P_N(X, Y)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y \cong \tag{35}$$

$$\cong \frac{\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y}{2\pi\sqrt{UW - V^2}} \exp\left[\frac{U(X - \bar{X})^2 - 2V(X - X)(Y - \bar{Y}) + W(Y - \bar{Y})^2}{2(UW - V^2)}\right],$$

where

$$\bar{X} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\iint x\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad \bar{Y} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\iint y\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},$$

$$U = \overline{Y^2} - (\bar{Y})^2 = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{\iint y^2\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} - \left(\frac{\iint y\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\right)^2\right],$$

$$V = \overline{XY} - \bar{X}\cdot\bar{Y} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{\iint xy\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} - \frac{\iint x\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \iint y\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\left[\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]^2}\right],$$

$$W = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{\iint x^2\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} - \left(\frac{\iint x\tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint \tilde{\omega}_n(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\right)^2\right].$$

In the present case, the functions $\tilde{\omega}_n(x, y)$ are given in polar coordinates

$$\frac{1}{2\pi} f_n(l)\cdot p_n(\varphi)\,\mathrm{d}l\,\mathrm{d}\varphi\,,$$

and we find

$$
(36)\quad \begin{cases}
\overline{X} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} [c_n^{(1)} + c_n^{(-1)}] \int_0^\infty l f_n(l)\,\mathrm{d}l ; \quad \overline{Y} = \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{N} [c_n^{(1)} - c_n^{(-1)}] \int_0^\infty l f_n(l) \cdot \mathrm{d}l \\
U = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{N} \left[(2c_n^{(0)} - c_n^{(2)} - c_n^{(-2)}) \int_0^\infty l^2 f_n(l)\,\mathrm{d}l + (c_n^{(1)} - c_n^{(-1)})^2 \left(\int_0^\infty l f_n(l)\,\mathrm{d}l \right)^2 \right] \\
V = \frac{i}{4} \sum_{n=1}^{N} \left[(c_n^{(2)} - c_n^{(-2)}) \int_0^\infty l^2 f_n(l)\,\mathrm{d}l - \{ (c_n^{(1)})^2 - (c_n^{(-1)})^2 \} \left(\int_0^\infty l f_n(l)\,\mathrm{d}l \right)^2 \right] \\
W = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N} \left[(2c_n^{(0)} + c_n^{(2)} + c_n^{(-2)}) \int_0^\infty l^2 f_n(l)\,\mathrm{d}l - (c_n^{(1)} + c_u^{(-1)})^2 \left(\int_0^\infty l f_n(l)\,\mathrm{d}l \right)^2 \right] .
\end{cases}
$$

In the case of equal f_n and p_n-functions, we get:

$$
(37)\quad \begin{cases}
\overline{X} = N \cdot \overline{\cos\varphi} \int_0^\infty l f(l)\,\mathrm{d}l ; \qquad \overline{Y} = N \cdot \overline{\sin\varphi} \int_0^\infty l f(l)\,\mathrm{d}l , \\
U = N \left[\frac{1 - \overline{\cos 2\varphi}}{2} \int_0^\infty l^2 f(l)\,\mathrm{d}l - \left(\overline{\sin\varphi} \int_0^\infty l f(l)\,dl \right)^2 \right] , \\
V = N \left[\frac{\overline{\sin 2\varphi}}{2} \int_0^\infty l^2 f(l)\,\mathrm{d}l - \overline{\sin\varphi} \cdot \overline{\cos\varphi} \left(\int_0^\infty l f(l)\,\mathrm{d}l \right)^2 \right] , \\
W = N \left[\frac{1 + \overline{\cos 2\varphi}}{2} \int_0^\infty l^2 f(l)\,\mathrm{d}l - \left(\overline{\cos\varphi} \int_0^\infty l f(l)\,\mathrm{d}l \right)^2 \right] .
\end{cases}
$$

When we apply this asymptotic expression to the one- or two-dimensional problems treated by TORALDO, we can find the results presented in his third paper.

The one-dimensional case.

We return to the initial problem. The lengths of the vectors are well defined, so that we get

$$
\begin{aligned}
f_n(l) \cdot \mathrm{d}l &= 0 , \qquad \text{for } l \neq A_n , \\
f_n(l) \cdot \mathrm{d}l &\neq 0 , \qquad \text{for } l = A_n ,
\end{aligned}
$$

and

$$\int_0^\infty f_n(l)\,\mathrm{d}l = 1\,, \qquad \text{(as probability functions).}$$

These equations can be taken as the definition of the δ-functions of Dirac, hence

(38) $$f_n(l) \cdot \mathrm{d}l = \delta(l - A_n) \cdot \mathrm{d}l\,,$$

and we obtain

(39) $$F_n^{(m)}(u) = \dot{J}_m(A_n u)\,.$$

In the case of $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, we found

(40) $$p_n(\varphi) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\alpha} \qquad (-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha),$$

$$= 0 \qquad (-\pi \leqslant \varphi < -\alpha;\ \alpha < \varphi \leqslant \pi),$$

and therefore:

(41) $$c_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p_n(\varphi) \cdot \exp\,[-ik\varphi]\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} \exp\,[-ik\varphi]\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sin k\alpha}{k\alpha}\,.$$

When $\alpha > \pi$, it can be proved that the same results are still valid. We get

(42) $$p_n(\varphi) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k\alpha} \cdot \cos k\varphi\,, \qquad (-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi).$$

For $\alpha = \pi,\ 2\pi, \ldots$, we find

(43) $$p_n(\varphi) = 1\,, \qquad \text{(isotropy)}$$

and finally, when $\alpha = 0$, we obtain

(44) $$p_n(\varphi) \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\exp\,[i(k + 1/2)\varphi] - \exp\,[-i(k + 1/2)\varphi]}{\exp\,[i\varphi/2] - \exp\,[-i\varphi/2]} = \delta(\varphi) \cdot \mathrm{d}\varphi\,,$$

as it was to be expected.

Due to the even parity of $p_n(\varphi)$, we find an expansion of $P_N(\mathscr{A}, \Phi)$ which is even in Φ. Indeed, we can show that

(45) $$g_N^{(-k)}(u) = (-1)^k g_N^{(k)}(u)\,,$$

and therefore

(46) $$P_N(\mathscr{A}, \Phi) = \int_0^\infty g_N^{(0)}(u) \cdot \dot{J}_0(\mathscr{A} u)\,\mathrm{d}u + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\Phi \int_0^\infty g_N^{(k)}(u) \cdot \dot{J}_k(\mathscr{A} u)\,\mathrm{d}u\,.$$

The approximation is easy to calculate. We apply (36):

$$(47)\quad \begin{cases} \bar{X} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \cdot \sum\limits_{k=1}^{N} A_n\,; \qquad \bar{Y} = 0\,; \\ U = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} A_n^2\,; \qquad V = 0 \\ W = \dfrac{1}{2}\left[1 + \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - 2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right] \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} A_n^2\,. \end{cases}$$

Therefore:

$$(48)\quad \begin{cases} P_N(\mathcal{A}, \Phi) \cdot \mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathrm{d}\Phi = \\ = \dfrac{\mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathrm{d}\Phi}{\pi\sqrt{LM}} \cdot \exp\left[-\left\{\dfrac{\left(\mathcal{A}\cos\Phi - \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\sum\limits_{n=1}^{N} A_n\right)^2}{L} + \dfrac{\mathcal{A}^2\sin^2\Phi}{M}\right\}\right] \\ L = \left[1 + \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha} - 2\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right] \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} A_n^2\,, \\ M = \left(1 - \dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right) \cdot \sum\limits_{n=1}^{N} A_n^2\,. \end{cases}$$

In the case that $\alpha = 0$, the approximation (48) converges to the exact function:

$$(49)\qquad P_N(\mathcal{A}, \Phi) \cdot \mathcal{A}\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathrm{d}\Phi = \delta\left(\mathcal{A} - \sum_{n=1}^{N} A_n\right) \cdot \delta(\Phi)\,\mathrm{d}\mathcal{A}\,\mathrm{d}\Phi\,.$$

The two-dimensional case.

Suppose we have a plane screen S, in which N apertures are distributed at random. Following Toraldo's third paper we can represent the amplitudes by

$$(50)\qquad A_n(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0)\,, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

where (α_0, β_0) and (α, β) are the direction coefficients of the incident and the diffracted light beam, measured with respect to the x- and the y-axis chosen in the plane of S. Due to the fact that the apertures can have all kinds of shapes, the amplitudes are functions of $\alpha - \alpha_0$ and $\beta - \beta_0$, which we do not specify. The phase angles φ can be brought under the form

$$(51)\qquad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y] + \varphi_0 = \xi + \varphi_0\,,$$

where ξ is the geometrical phase shift and φ_0 is some possible optical phase shift.

The functions $F_n^{(m)}(u)$ are again given by

$$F_n^{(m)}(u) = \tilde{J}_m[A_n(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) \cdot u]\,, \tag{52}$$

and the functions $p_n(\varphi)$ are equal and given by

$$p_n(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{d\varphi}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c^{(k)} \exp\,[ik\varphi], \tag{53}$$

where

$$c^{(k)} = \frac{1}{S} \iint_S \exp\,[-ik(\xi + \varphi_0)]\, dS\,. \tag{53'}$$

For instance, in the case of a rectangular screen $(-a, +a; -b, +b)$ we get

$$c^{(k)} = (\overline{\cos k\varphi_0} - i\, \overline{\sin k\varphi_0}) \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)ka}{\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha - \alpha_0)ka} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)kb}{\frac{2\pi}{\lambda}(\beta - \beta_0)kb}\,. \tag{54}$$

We can now define

$$\left\{ \begin{aligned} L(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) &\equiv \frac{1}{S} \iint_S \cos \xi \, dx\, dy, \\ M(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) &\equiv \frac{1}{S} \iint_S \sin \xi \, dx\, dy\,, \end{aligned} \right. \tag{55}$$

and apply (35) with the following terms:

$$\begin{aligned} \overline{X} = \{ L(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) \cdot \overline{\cos \varphi_0} &- \\ - M(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) \cdot \overline{\sin \varphi_0} \} &\cdot \sum_{n=1}^{N} A_n(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{Y} = \{ L(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) \cdot \overline{\sin \varphi_0} &+ \\ + M(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) \cdot \overline{\cos \varphi_0} \} &\cdot \sum_{n=1}^{N} A_n(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \{ 1 - L(2(\alpha - \alpha_0),\ 2(\beta - \beta_0)) \cdot \overline{\cos 2\varphi_0} + M(2(\alpha - \alpha_0),\ 2(\beta - \beta_0)) \cdot \overline{\sin 2\varphi_0} - \\ - 2[L(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) \cdot \overline{\sin \varphi_0} + M(\alpha - \alpha_0,\ \beta - \beta_0) \cdot \overline{\cos \varphi_0}]^2 \} \cdot \sum_{n=1}^{N} A_n^2\,, \end{aligned}$$

$$V=\frac{1}{2}\{M(2(\alpha-\alpha_0),\ 2(\beta-\beta_0))\cdot\overline{\cos 2\varphi_0}+L(2(\alpha-\alpha_0),\ 2(\beta-\beta_0))\cdot\overline{\sin 2\varphi_0}-$$
$$-2\,[L(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0)\cdot\overline{\cos\varphi_0}-M(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0)\cdot\overline{\sin\varphi_0}]\times$$
$$\times[L(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0)\,\overline{\sin\varphi_0}+M(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0)\cdot\overline{\cos\varphi_0}]\}\sum_{n=1}^{N}A_n^2\,,$$

$$W=\frac{1}{2}\{1+L(2(\alpha-\alpha_0),\ 2(\beta-\beta_0))\cdot\cos 2\varphi_0-M(2(\alpha-\alpha_0),\ 2(\beta-\beta_0))\cdot\sin 2\varphi_0-$$
$$-2[L(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0)\cdot\overline{\cos\varphi_0}-M(\alpha-\alpha_0,\ \beta-\beta_0)\cdot\overline{\sin\varphi_0}]^2\}\cdot\sum_{n=1}^{N}A_n^2\,.$$

For $\overline{\sin\varphi_0}=0$, the formulae become equivalent to those in Toraldo's paper.

RIASSUNTO (*)

Dopo aver mostrato come un particolare problema di diffrazione della luce può essere ridotto a un problema puramente matematico nella rappresentazione di Fresnel, l'autore considera il caso più generale e stabilisce delle relazioni ricorrenti esatte riguardanti le funzioni di probabilità definite. Si dà la soluzione esatta di queste equazioni e per il caso isotropico si trova che le soluzioni sono identiche a quelle offerte dalla teoria della distribuzione casuale delle fasi. In pratica, tuttavia, le soluzioni sono applicabili solo ai casi in cui N, numero dei centri, è piccolo. Per N grande, le soluzioni possono essere approssimate per mezzo di curve gaussiane. I risultati sono, infine, applicati a un problema unidimensionale e ad uno bidimensionale.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*

IL NUOVO CIMENTO Vol. IX, N. 3 1 Marzo 1952

A unified field theory with varying charge and rest-mass.

H. C. Corben (*)

Carnegie Institute of Technology - Pittsburgh, Pennsylvania (**)

(ricevuto il 3 Gennaio 1952)

Summary. — It is shown that the neutron and proton may be treated as different states of the one particle in a classical field theory by ascribing to them an extra degree of freedom in terms of which to specify the electric charge. This may be done in the framework of a unified field theory which is a modification of the theory of Kaluza and Klein, Kaluza's constant a being chosen to give the correct mass difference of neutron and proton. Without the explicit introduction of meson potentials or any free parameters, it then follows that there exists a short range ($\sim 10^{-13}$ cm) attraction between neutron and proton, and a modified Coulomb interaction between two protons. The possibility of charge exchange between nucleons is a consequence of the field equations and the geodesic equations of motion. A photon may acquire a charge and rest-mass when extremely close to a charged particle, and the possibility arises for the formation of systems of such charged photons with rest energies of order 100 MeV. Without any special assumptions about the fifth coordinate x^5 it follows that in the linear approximation the electromagnetic potentials satisfy Maxwell's equations and are independent of x^5 when all other potentials are neglected. Correspondence with classical electrodynamics is established in the limit $a \to 0$.

1. – Introduction.

In the isotopic spin formalism of nuclear theory, it is possible to specify the neutron or proton state of a nucleon, but the accompanying change of rest-mass of the nucleon can be incorporated into the theory only in a very formal manner. Since even then the theory of nuclear forces does not appear

(*) Fulbright visiting lecturer at the University of Genoa, Italy.

(**) Supported by ONR Contract.

adequate, it may prove profitable to develop a theory, at first classically, in which the charge and rest-mass of a particle may not be always constants of the motion, thereby obtaining a classical analogue of nuclear processes involving charge exchange and changes of mass.

We therefore develop here such a theory with the hope that subsequent quantization would describe such processes. For this purpose it is necessary to associate with a particle an extra degree of freedom, in terms of which to specify the electric charge which the particle carries. This may be achieved in several ways (1) and for definiteness we shall adopt here the unified field theory approach. The extra degree of freedom then requires that the theory be set up in a five-dimensional space; it therefore bears some formal analogy to other unified field theories in five dimensions (2). All such theories possess the advantage of uniqueness in that once the metric is defined both the field equations and the equations of motion of a particle in a given field are determined. Their disadvantage lies in the artificial introduction of an extra coordinate, the meaning of which is never clear, and in the fact that phenomena which may be expected to arise in a correct synthesis of gravitational and electromagnetic theories fail to do so.

It is the purpose of this paper to point out a method by which these and some other weak points in a unified field theory of this type may be at least partially removed, the advantage of uniqueness being retained. Unexpected consequences which then arise include the appearance of the neutron and proton as different states of the one particle, the exchange of charge between colliding nucleons, a short range force ($\lesssim 10^{-13}$ cm) between neutrons and protons, and a modification of the properties of photons when very close to charged particles.

We consider a particle, the configuration of which we shall suppose may be represented by the quantities x^μ ($\equiv \mathrm{r}$, ict, x^5) ($\mu = 1 \dots 5$) and let

$$\mathrm{d}\tau^2 = - g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu \,, \tag{1.1}$$

following the suggestion of Klein and Kaluza. The g_{ij} ($i, j = 1 \dots 4$) are supposed to represent the gravitational potentials in which the particle moves, and we shall write

$$\left\{ \begin{aligned} & g_{i5} = g_{5i} = ia A_i/c^2 \,, \\ & g_{55} = 1 - (a^2/c^2)\Phi \,, \\ & A_i = (\boldsymbol{A}, i\varphi) \,, \end{aligned} \right. \tag{1.2}$$

(1) e.g. E. C. G. Stueckelberg and J. F. C. Patry: *Helv. Phys. Acta*, **13**, 167 (1940).

(2) e.g. Th. Kaluza: *Sitz. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 966 (1921); O. Klein: *Zeits. f. Phys.*, **37**, 895 (1926); A. Einstein and W. Mayer: *Sitz. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 130 (1932); W. Pauli: *Ann. d. Phys.*, **18**, 305, 377 (1933); A. Einstein and

where a is a general constant, independent of any particular particle. We shall suppose that a is real, so that $x^5 = iu$ is time-like.

With each particle we shall associate an «intrinsic mass» M, which is a constant of the motion and is a characteristic of the particle, and in a manner analogous to, but not identical with, that employed by KALUZA and KLEIN, we define the charge e on a particle in terms of M thus,

$$e = iMa\,\mathrm{d}x^5/\mathrm{d}\tau = -Ma\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\tau\,, \tag{1.3}$$

where a is the general constant introduced above. Charge is, therefore, characterized by the component of the «velocity» of the particle in the x^5 direction. We now define the rest-mass m of a particle also in terms of M by

$$m = M\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}\tau\,, \tag{1.4}$$

so that

$$e/ma = -\mathrm{d}u/\mathrm{d}s\,, \tag{1.5}$$

with $\mathrm{d}s^2 = -g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$ being defined as the four-dimensional line-element. With these definitions, we proceed to show that m and e have properties which justify our calling them «mass» and «charge» respectively. However, despite the similarity of this formalism to that of KALUZA and KLEIN, the consequences of this field theory are quite different, for in general it follows that neither e nor m is a constant of the motion when a particle moves in a given field.

2. – The Field Equations.

As in the general theory of relativity, we derive the field equations from the Lagrangian

$$\mathfrak{L} = \int R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3\,\mathrm{d}x^4\,\mathrm{d}x^5\,,$$

with

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\,,$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\sigma\mu\nu.}^{\ \ \ \ \ \sigma} = \left\{ {\sigma \atop \nu\sigma} \right\}_{,\mu} - \left\{ {\sigma \atop \nu\mu} \right\}_{,\sigma} - \left\{ {\tau \atop \sigma\tau} \right\}\left\{ {\sigma \atop \nu\mu} \right\} + \left\{ {\sigma \atop \tau\mu} \right\}\left\{ {\tau \atop \nu\sigma} \right\}.$$

Thus, if

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R\,,$$

we have $G_{\mu\nu} = 0$ in the absence of matter, i.e. of fields other than $g_{\mu\nu}$.

P. G. BERGMANN: *Ann. of Math.*, **39**, 683 (1938); H. T. FLINT: *Phil. Mag.*, **33**, 369 (1942); P. JORDAN and C. MÜLLER: *Zeits. f. Naturforschung*, **2a**, 1 (1947); P. G. BERGMANN: *An Introduction to the Theory of Relativity* (Prentice Hall, 1942), pp. 254-279.

If such matter fields are present, we shall characterize them by a symmetrical tensor $P_{\mu\nu}$, such that [3]

$$G_{\mu\nu} + \alpha P_{\mu\nu} = 0\,,$$

where $\alpha = 8\pi K/c^4$, K being the gravitational constant.

These field equations relate the gravitational, electromagnetic and Φ potentials with the matter which generates them. They may be quantized by the methods developed by BERGMANN and SCHILD [4], but we consider here their consequences in the linear approximation without quantization. In this approximation they may be written, after a suitable coordinate transformation [5],

$$\partial_\varrho \partial_\varrho \gamma_{\mu\nu} + 2\alpha P_{\mu\nu} = 0\,,$$

$$\partial_\nu \gamma_{\mu\nu} = 0\,,$$

with

$$\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} h\,,$$

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,,$$

$$h = h_{\nu\nu}\,,$$

terms not linear in $h_{\mu\nu}$ having been omitted. In terms of the $g_{\mu\nu}$, these equations read

$$\partial_\varrho \partial_\varrho g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu} \partial_\varrho \partial_\varrho g_{\sigma\sigma} + 2\alpha P_{\mu\nu} = 0\,, \tag{2.1}$$

$$\partial_\nu g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu g_{\sigma\sigma}\,, \tag{2.2}$$

from which the «conservation equation»

$$\partial_\mu P_{\mu\nu} = 0\,, \qquad (\mu = 1.5) \tag{2.3}$$

naturally follows. We look for solutions of these equations for which the gravitational field is neglected, so that $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ and Eqs. (2.1), (2.2) may be

---

(3) P. G. BERGMANN: *An Introduction to the Theory of Relativity* (Prentice Hall, 1942), p. 179.

(4) P. G. BERGMANN and J. H. M. BRUNINGS: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 480 (1949); F. A. E. PIRANI and A. SCHILD: *Phys. Rev.*, **79**, 986 (1950).

(5) Ref. (3), p. 184.

written thus:

$$(2.4)\qquad \left\{\begin{aligned} \partial_\varrho\partial_\varrho A_i &= -\frac{4\pi}{c} j_i\,, \\ \partial_\varrho\partial_\varrho \Phi &= \frac{4\alpha c^2}{a^2} P_{55}\,, \\ \frac{\partial A_i}{\partial u} &= -\frac{1}{2} a\partial_i\Phi\,, \\ \partial_i A_i &= -\frac{a}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,, \\ P_{ij} &= P_{55}\delta_{ij}\,, \end{aligned}\right.$$

where

$$(2.5)\qquad j_i = -\frac{i\alpha c^3}{2\pi a} P_{i5}\,,$$

The last of Eqs. (2.4) is simply a restriction on the matter field in order that solutions of the form $g_{ij} = \delta_{ij}$ should exist. It is of course satisfied in free space ($P_{\mu\nu} = 0$). P_{ij} is interpreted, then, as the energy momentum tensor of the matter field, and from (2.5) P_{i5} is a constant times the current density of the matter field. The component P_{55} is discussed briefly in Sec. 7; here we shall neglect all components of $P_{\mu\nu}$ other than P_{i5}. Thus, from (2.4), $\partial j_i/\partial u = 0$, so that Eq. (2.3) yields at once true conservation laws of energy momentum, and charge:

$$\partial_i P_{ij} = 0\,, \qquad \partial_i P_{i5} = 0\,. \qquad\qquad (i = 1 \dots 4).$$

It is satisfactory that if we look for a solution of (2.4) for which $\Phi = 0$, the A_i must the satisfy then equations

$$\partial_j\partial_j A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i\,,$$

$$\partial_i A_i = 0\,, \qquad \frac{\partial A_i}{\partial u} = 0\,.$$

i.e. Maxwell's equations, together with the supplementary Lorentz condition and the condition that the A_i should be functions of only the four variables ($\boldsymbol{r}$, t).

3. – Motion of a free particle.

If there are no potentials present, the Lagrangian for a particle may be written thus:

$$L = -Mc\left| -\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\right|^{1/2}.$$

so that we may define a set of five momenta which are constants of the motion:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau)} = Mc\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = mc\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,,$$

from (1.4). From the definition (1.3) of e, this may be written

$$p_\mu = \left(\boldsymbol{p},\ \frac{iE}{c},\ -\frac{iec}{a}\right),$$

so that for a free particle the fifth component of momentum is proportional to the charge and is a constant of the motion. In the presence of a field, however, p_5 is no longer proportional to the charge, in the same way that E is no longer proportional to the mass in the presence of a scalar potential. Thus, if the fields do not depend on x^5, it follows that p_5 is constant; this does not imply that e is constant.

For a free particle, we note that

(3.1) $$M^2 = m^2 + e^2/a^2\,,$$

so that for a given free particle (characterized by M) m and e may have any values related by this equation. In particular, if a free neutral particle has a mass m_n and subsequently, due to the action of A_i, Φ fields, it picks up a charge, then if it has a charge e when it is free again, it must have a mass

(3.2) $$m_c = (m_n^2 - e^2/a^2)^{1/2}\,,$$

i.e., in picking up a charge it had to lose some rest mass.

It is tempting to regard this equation as relating the masses of the neutron and proton, which it does if the universal constant a is chosen to be [6]

$$a = e_0/\mu\,, \qquad (\mu = 96.7\ m_e)$$

where e_0, m_e will always denote the free proton charge and the free electron mass respectively. We shall adopt this value for the constant a and of course must adhere to it even when discussing particles other than nucleons.

Although as yet there is no hint that the charge is quantized, we at least have a classical theory in which the neutron and proton can be regarded as the same particle, i.e. can be characterized by the same value of M. The mass difference between the neutron and proton then appears quite naturally, and in a sense is electromagnetic in origin, being proportional to e^2. It tends to infinity as the constant a tends to zero – this theory yields other such classical results in the limit $a \to 0$.

([6]) The value .788 MeV for the $n - H^1$ mass difference is given by R. E. Bell and L. G. Elliott (*Phys. Rev.*, **79**, 282 (1950)), and the values $m_e c^2 = .5108$ MeV, $m_p/m_e = 1836.6$ by J. W. M. du Mond and E. R. Cohen: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 651 (1949).

The mass of a particle here is a maximum when it is neutral, but a choice of x^5 real and a imaginary would have made it a minimum. This choice could be used to relate the electron and neutrino, or the π^0 and $\pi^{\pm}$-mesons, but it would not allow us to represent the neutron and proton as different states of the one particle, and we do not consider it here. Electrons and neutrinos are not regarded as different states of the same particle in this theory, and mesons may appear in a more indirect way, as discussed briefly in Sec. 6. If an electron were to be described by this theory, it would have to be able to transform, during sufficiently energetic collisions into a neutral particle of mass 96.7 times its free mass, a process for which there is no experimental evidence.

4. – Geodesic equations of motion.

We now write down the Lagrangian purporting to describe the motion of a particle in the presence of gravitational, electromagnetic and Φ fields:

$$L = - Mc\left[- g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\right]^{1/2}, \tag{4.1}$$

from which may be derived the geodesic equation

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\sigma g_{\varrho\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\varrho} - \partial_\varrho g_{\nu\sigma})\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = 0\,,$$

or the equivalent equations

$$\left\{\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial L}{\partial(\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau)} = Mcg_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} = Mc\,\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}\,,\\ \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2}\,Mc(\partial_\mu g_{\nu\sigma})\,\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,.\end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

For simplicity, we shall examine these equations for the case in which the external potentials satisfy Eqs. (2.4), so that

$$p_i = mc\delta_{ij}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} + \frac{e}{c}A_i\,, \tag{4.3}$$

$$e_f = ip_5 a/c = e\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\,\Phi\right) - \frac{a^2 m}{c^2}A_i\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\,, \tag{4.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\,mc\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\,\partial_\mu g_{\nu\sigma}\,, \tag{4.5}$$

or

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}\,\partial_i A_j\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{mc}\,\partial_i \Phi\,, \tag{4.6}$$

$$-\frac{ic}{a}\frac{\mathrm{d}e_f}{ds} \equiv \frac{\mathrm{d}p_5}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\,\partial_5 A_j + \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{mc}\,\partial_5 \Phi\,, \tag{4.7}$$

where $e_f = ip_5 a/c$ is the charge the particle has when it is free, constant if $\partial_5 A_i = 0$ and $\partial_5 \Phi = 0$. Thus, using (2.4) again,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(m\delta_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{e}{c^2}\,f_{ij}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} - \frac{A_i}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}s}\,, \tag{4.8}$$

with $f_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$.

Apart from the last term, this is of the form of the Lorentz equation of motion in classical electrodynamics, so that the use of the words « charge » and « mass » for e and m respectively is justified. The fourth component of (4.8) may be written

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m\gamma c^2) = e\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{v} - \varphi\,\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\,, \qquad (\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2})$$

where $\mathcal{E}$ is the applied electric field, so that, if the charge on a particle increases when the particle is in a negative electrostatic potential, the kinetic energy is correspondingly increased. We shall find, however, that because of the value chosen for a, particles with the charge and mass of the proton would have to approach to within distances of order 10^{-13} cm from each other before their charges were modified by an amount comparable with their free value. It is only for such large potential charges that the term involving $\mathrm{d}e/\mathrm{d}s$ has any significance. In its absence, the potentials A_i do not appear explicitly in the equations of motion; if a particle is taken through a sufficiently large potential change, however, the equations describing its motion are no longer gauge invariant.

If we use the field Eqs. (2.4), Eq. (4.7) may be written in the form

$$\frac{\mathrm{d}e_f}{\mathrm{d}s} = -\frac{ea^2}{2c^2}\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}\,,$$

the total derivative on the right hand side involving also a derivative with respect to x^5. Hence, if the Φ field is constant along the path of a particle in 5-space, the free charge is a constant of the motion, so that on becoming free again the particle would carry its original charge. In particular, if Φ is everywhere zero, the charge that the particle carries when free is always the same.

It should also be noted that from (4.8)

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{c^2} A_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}s},$$

so that the mass of a particle cannot change without its charge varying simultaneously.

The integral of the geodesic equations

$$p_\mu \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau = -Mc,$$

may be written in the form

$$M^2 = m^2 + \frac{2e_f}{a^2} e - \frac{e^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2\Phi}{c^2}\right), \tag{4.9}$$

and could alternatively have been derived by multiplying the above geodesic equations (4.8) by $\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ and using (4.7) and (2.4). Coupled with the expression (4.4) for e_f, also a constant of the motion if the variable x^5 is cyclic, this yields two equations for the values of m and e in a given field. Clearly, even if $\Phi = 0$, the constancy of M and e_f is inconsistent, in general, with that of m and e, unless $A_i \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}s$ is constant along the path of the particle.

Correspondence with classical electrodynamics is established by setting $a = 0$ in the above equations and neglecting the Φ field.

These geodesic equations may also be derived from the Hamiltonian

$$H = -(-g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu)^{1/2} = -Mc, \tag{4.10}$$

so that

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial H}{\partial p_\mu} = \frac{1}{Mc} g^{\mu\nu}p_\nu, \\ \frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{2Mc} p_\varrho p_\sigma \partial_\mu g^{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} Mc(\partial_\mu g_{\nu\sigma}) \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\partial\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}. \end{aligned}\right. \tag{4.2'}$$

The Hamiltonian may be expressed in terms of its appropriate variables p_μ either by computing the reciprocal tensor $g^{\mu\nu}$, or, what amounts to the same thing, though more convenient analytically, by noting that in this case $H = L$. Eliminating the velocities from the Lagrangian, we have

$$L = -\left[\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right)^2 + 2e_f \frac{c^2}{a^2} e - \frac{e^2c^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\Phi\right)\right]^{1/2},$$

but, since the charge e is treated as a velocity, it also must be eliminated by the relation

$$e = \frac{a}{c} YX,$$

where

$$\tag{4.11} \begin{cases} Y = \left(1 - \dfrac{a^2\Phi}{c^2} + \dfrac{a^2}{c^4} A_i A_i\right)^{-1}, \\ X = \dfrac{ce_f}{a} + \dfrac{a}{c^2} A_i p_i . \end{cases}$$

The free charge $e_f = ip_5 a/c$ is a momentum, and appears in the Hamiltonian. The Hamiltonian for a particle then becomes

$$\tag{4.12} H = -[-\sum p_i^2 + YX^2]^{1/2} = -Mc .$$

It is not difficult to verify that the equations of motion (4.3), (4.4), (4.6) and (4.7) may be derived from this Hamiltonian. By noting Eq. (3.1)

$$\tag{4.13} m_f^2 = M^2 - \frac{e_f^2}{a^2},$$

where m_f, e_f are the mass and charge of the particle when it is free, it is possible, by using Eq. (4.9), to throw this Hamiltonian relation into the form

$$\tag{4.14} -\left(p_i - \frac{e_f}{c} A_i\right)^2 - m_f^2 c^2 + e_f^2 \Phi + \frac{a^2}{c^4} Y \left[\left(p_i - \frac{e_f}{c} A_i\right) A_i + ce_f\Phi\right]^2 = 0 ,$$

in which equivalence to the usual Hamiltonian in the limit $a \to 0$, $\Phi \to 0$ is more obvious. In any form, H^2 is a homogeneous quadratic function of the momenta, and the corresponding equations of Schrödinger, Klein-Gordon and Dirac may be written down immediately, with $p_\mu \to -i\hbar\partial_\mu$, or $p_i \to -i\hbar\partial_i$, $e_f \to -(ia\hbar/c)(\partial/\partial u)$. In the special case $e_f = 0$, $\Phi = 0$, Eq. (4.14) may be written simply thus:

$$\tag{4.15} -\sum\left(p_i - \frac{e}{c} A_i\right)^2 = c^2(m_f^2 + e^2/a^2) ,$$

where, however, e is not a constant.

5. – A static solution.

As an example, we set $\Phi = 0$, $\boldsymbol{A} = 0$ and consider a particle in a time-independent electrostatic potential $\varphi(\boldsymbol{r})$. This is clearly a solution of (2.4) if φ is a solution of Laplace's equation. Eq. (4.11) then yields

$$\tag{5.1} e = \left(e_f - \frac{a^2\varphi E}{c^4}\right)\left(1 - \frac{a^2}{c^4}\varphi^2\right)^{-1},$$

where E is the total energy, three integrals of the equations of motion in this

case being

$$(5.2)\qquad \begin{cases} e_f = e + a^2\varphi m\gamma/c^2 & \text{(from 4.4)} \\ M^2 = m^2 + \dfrac{2ee_f}{a^2} - \dfrac{e^2}{a^2}, & \text{(from 4.9)} \\ E = mc^2\gamma + e\varphi & \text{(from 4.3)} \end{cases}$$

from which (5.1) could alternatively be derived. It then follows that, if as before m_f be the mass of the particle when it is free,

$$(5.3)\qquad m = \frac{m_f}{\left(1 - \dfrac{a^2}{c^4}\varphi^2\gamma^2\right)^{1/2}},$$

$$(5.4)\qquad \gamma = \frac{E - e_f\varphi}{mc^2(1 - a^2\varphi^2/c^4)},$$

again exhibiting the correspondence with classical electromagnetic theory in the limit $a \to 0$. Thus, for m real, $m_f \neq 0$,

$$\gamma \leqslant \left|\frac{c^2}{a\varphi}\right| .$$

The particle requires an infinite energy for γ to reach this limit.

From Eq. (5.1), the change in the charge of a particle is negligible compared to its free charge if

$$|\varphi| \ll \frac{c^4}{a^2E}e_f \quad\text{and}\quad |\varphi| \ll c^2/a,$$

from the numerator and denominator respectively. If $\varphi = Ze_0/r$ where e_0 is the free proton charge, this yields

$$r \gg \left|\frac{e_0}{e_f}\right| \frac{ZE}{m_ec^2} 3 \cdot 10^{-17}\ \text{cm} \quad (m_e = \text{free electron mass})$$

and

$$r \gg Z \cdot 2.9 \cdot 10^{-15}\ \text{cm}.$$

For an electron with total energy $E \sim m_ec^2$ the second condition is more stringent, but it is easily satisfied for atomic electrons. For a proton, projected into such an electrostatic potential field with a velocity $\ll c$, the first condition is more stringent, yielding, for $Z = 1$,

$$(5.5)\qquad r \gg 5.54 \cdot 10^{-14}\ \text{cm} = r_c,$$

the effective range of this unusual interaction increasing with the total energy of the proton. For a neutron, moving when free with a non-relativistic velo-

city, the charge induced on it is negligible compared with e_0 at distances from the center of a fixed Coulomb potential $e_0 r^{-1}$ which satisfy (5.5).

Such a change in the electric charge carried by a particle when it comes very close to another particle would greatly modify the electromagnetic interaction between the two. An interaction of this type may be regarded as that which would pertain if the charges did not vary, together with a short range interaction arising from the modification of the electromagnetic coupling constant. Thus without the explicit introduction of meson potentials an effective short range interaction between nucleons arises from this theory. The range appears somewhat small to describe nuclear forces and indeed that it is of the right order of magnitude may be fortuitous; nevertheless this offers a novel method of deriving short range forces from a field theory without recourse to meson theory.

From (5.1), a neutral particle projected into a positive potential $\varphi = e_0/r$ due to a proton would have a charge induced on it which would be at first negative, being, for a neutron of non-relativistic velocity when free, $-e_0 r_c/r$. This would give rise to an attractive potential between the neutron and the proton of energy

$$-\frac{7.7 \cdot 10^{-27}}{r^2}\ \text{MeV},$$

(r in cm) or approximately. 1 MeV at $r = 2.8 \cdot 10^{-13}$ cm. For smaller r, however, this expression is modified by the denominator term in (5.1), and indeed as $\varphi \to \infty$, $e \to 0$. The charge on the source is also modified by the presence of the other particle and in determining the $n-p$ force predicted by this theory it would be necessary to take this into account, together with the $\boldsymbol{A}$ potential neglected in this static approximation.

If two identical particles, each with the free charge e_0 of the proton, or $-e_0$ of the electron, are projected directly towards each other so that each has a total energy $E = m_f \gamma_f c^2$ in the center of mass system, then, if γ_f is not too large, they will come to rest instantaneously when separated by a distance δ. At this instant, the potentials at the position of each due to the presence of the other are, within the linear approximation to the field equations, the Wiechert solutions of Maxwell's equations. For $\bar{v} \ll c^2\delta^{-1}$, or $\delta \gg e^2/mc^2$, the vector potential may be neglected, and each particle is instantaneously in the scalar potential $\varphi = e\delta^{-1}$ due to the other. From the first of Eqs. (5.2), it then follows that δ is given by

$$\varphi(\delta) = \frac{e_f}{\delta + \dfrac{a^2 m}{c^2}} = \pm \frac{e_0}{\delta + \dfrac{a^2 m}{c^2}},$$

so that

$$
(5.6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\delta &= \frac{e_0^2}{\mu^2 c^2}\left[\frac{M}{x} - m_f\left(1-\frac{\mu^2x^2}{M^2}\right)^{-1/2}\right],\\
E &= m_f\gamma_f c^2 = c^2\left[\frac{\mu^2 x}{M} + m_f\left(1-\frac{\mu^2x^2}{M^2}\right)^{1/2}\right],
\end{aligned}
\right.
$$

where

$$x = \frac{a^2 M}{e_f c^2}\,\varphi(\delta) = \pm\frac{e_0 M}{\mu^2 c^2}\,\varphi(\delta)\,,$$

$$M^2 = m_f^2 + \frac{e_f^2}{a^2} = m_f^2 + \mu^2\,.$$

For two protons, (5.6) may be written, approximately, for $x \lesssim 1$,

$$K.E. \doteqdot E - m_f c^2 = 2.6x\, 1 - (2/x)\ \text{MeV}\,,$$

$$\delta = r_c(x^{-1} - 1)\,.$$

Thus

$$K.E. \doteqdot \frac{1.3(2\delta + 1)}{(\delta + 1)^2}\ \text{MeV}\,,$$

with δ measured in units of r_c. This curve is plotted in fig. 1, the corresponding classical result (Coulomb's law) being shown on the same diagram. The

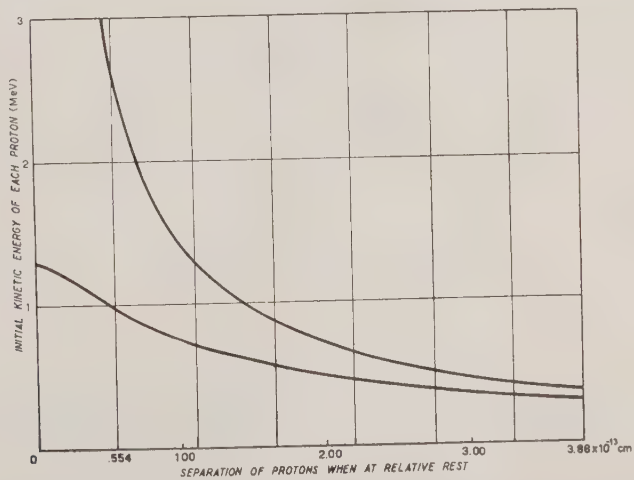


Fig. 1. – Kinetic energy of protons projected directly towards each other as a function of their minimum separation. The upper curve represents Coulomb's law.

lower curve remains finite as $\delta \to 0$, but it is not capable of accurately describing proton-proton scattering. However, only in a very crude sense is is to be interpreted as an effective potential.

6. – Null geodesics in an elettromagnetic field.

A particle moving along a null geodesic, in this theory, is characterized by $M = 0$, so that, from (4.13), $m_f = 0$, $e_f = 0$. When it is free it is therefore without rest mass or charge, and we shall call it a photon. If it encounters an electromagnetic field, however, we have, from (4.9), (cf. also (4.15))

$$m = \frac{|e|}{a}, \tag{6.1}$$

if $\Phi = 0$, i.e. the photon may pick up a charge and acquire a rest mass when it is in the field. When free again it would revert to its original chargeless massless state – it cannot exist in the free state with a finite charge and rest mass and cannot be identified with a meson. A photon that acquired a charge ne_0 in this fashion would then have a rest mass $96.7nm_e$ where m_e is the free electron mass.

Another way of looking at the short range nucleon-nucleon interaction considered in Sec. 5 is, then, to regard it as arising from exchange of photons between the particles, these photons possessing both charge and rest mass in virtue of the high potentials which are present.

We return to Eq. (4.11) and consider the charge on a particle for which $e_f = 0$ and which encounters no Φ field:

$$e = \frac{a^2}{c^3}\,\frac{\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p} - \dfrac{\varphi E}{c}\right)}{1 - \dfrac{a^2}{c^4}(\varphi^2 - \boldsymbol{A}^2)}, \tag{6.2}$$

with

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}\gamma + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}, \qquad E = mc^2\gamma + e\varphi. \tag{6.3}$$

Hence

$$\frac{e}{m} = \frac{a^2\gamma}{c^3}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - c\varphi), \tag{6.4}$$

or directly from (4.4). This relation is quite general, for $\Phi = 0$, but for a photon, defined as a particle which moves along a null geodesic, it becomes, from (6.1),

$$\frac{e}{|e|} = \frac{a}{c^3}\gamma(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - c\varphi). \tag{6.4'}$$

A photon could move in a potential $\boldsymbol{A}$ ($\varphi = 0$) with the velocity c ($\gamma \to \infty$) only if $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ i.e., for instance, in the direction of propagation of a traverse light wave, the vector potential being normal to the direction of motion of the photon. A photon may thus appear in the dual rôle of a particle moving along a null geodesic and of a transverse $\boldsymbol{A}$ wave, for these could travel together in otherwise free space each with the velocity c.

For negligible $\boldsymbol{A}$, Eq. (6.4′) may be written

$$\gamma = \frac{-c^2}{a\varphi} \frac{e}{|e|},$$

so that a particle moving along a null geodesic, which we have called a photon, could pick up a negative charge when in a positive electrostatic potential and a positive charge when in a negative electrostatic potential. Its velocity in either case is given by

$$v = c\left(1 - \frac{a^2\varphi^2}{c^4}\right)^{1/2},$$

tending of course to c as $\varphi \to 0$. For a potential equal to that due to the proton at the first Bohr orbit of a hydrogen atom, the velocity of the photon would differ from its free value by about one part in 10^{13}. The effect is, therefore, negligible except for extremely large potential changes, the velocity differing appreciably from its free value only at distances of order 10^{-15} cm from the center of a Coulomb potential $e_0 r^{-1}$. In such a potential it follows from (6.2) that a photon of energy E would pick up a charge $-ne_0$ at a distance

$$\varrho = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + (\varepsilon^2 + 4)^{1/2}\right),$$

where $\varepsilon = E/n\mu c^2$ and ϱ is measured in units $e_0^2/\mu c^2 \sim 3 \cdot 10^{-15}$ cm.

TABLE I.

ε	Energy of «photon» (MeV)	$\varrho(10^{-13}$ cm)	β
0	0	.03	0
.71	35	.04	.71
1	50	.05	.79
4	200	.13	.97
10	500	.3	.995
100	$5 \cdot 10^3$	3	1
1000	$5 \cdot 10^4$	30	1

Distance ϱ from a fixed proton at which a particle on a null geodesic acquires one electronic charge, and velocity β of the particle at this point, if started off freely with energies shown. Recoil on proton neglected.

From the numerical values given in Table 1 it is clear that photons in this theory behave normally except when extremely close to a point charge, but that in such an environment they are obliged to acquire a charge and a rest-mass in order to stay on a null geodesic. Such a photon, exchanged between two nucleons, provides a mechanism for charge exchange between them, and such a property leads also, even at the present elementary level, to the scattering of light by a Coulomb field. In the above discussion, however, the reaction of the photon back on the scattering particle has been neglected; this includes the change of charge of the proton during the collision, as well as its change of momentum and energy.

Since according to this theory a photon is obliged to acquire a charge and a mass when in a strong field, the possibility arises for the formation of systems of photons and other particles, bound to each other. If it be assumed that the charge acquired by a photon is quantized, so that ν^n may denote a photon of charge ne_0 and mass $96.7nm_e$, systems such as $(\nu^1\,\nu^{-1})$, $(\nu^2\,\nu^{-1})$, $(\nu^2\,e^{-1})$, $(\nu^{-n}\,N^{n+1})$ (where e = electron, N = nucleon) bear a remarkable but perhaps fortuitous similarity to the particles π^0, π^+, μ^+, V_1^+. The process $N \to N + \nu$, for example, would lead to the formation of all but the third system in sufficiently energetic nucleon-nucleon collisions, while the spontaneous disintegration of the first system into two free photons is an obvious possibility!

7. – Discussion.

As developed so far, even the foundations of this theory are not complete. We have derived the equations giving the fields generated by a given distribution of matter (characterized by $P_{\mu\nu}$) and the equations of motion of a test particle in such fields. In addition, we should regard a distribution of matter as an aggregate of such test particles and write

$$P^{\mu\nu} = \frac{\varrho'}{c^2}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}, \tag{7.1}$$

where $-P^{44} = \varrho'$ is the energy density. It then follows that for a single particle

$$\int P^{55}\,\mathrm{d}v = \frac{c^4}{a^2}\,r_0(1-\beta^2)^{1/2},$$

where r_0 is the classical radius of the particle. This, according to (2.4), is to be regarded as the source of a Φ field which, however, does not directly affect the motion of a particle, since Φ does not appear explicitly in (4.8). On the

other hand, the presence of a Φ field modifies the A_i through (2.4) and thus affects the notion of a particle indirectly.

However, an attempt to incorporate Eq. (7.1) into the theory presents a great difficulty, that arising from the enormous difference in magnitude between gravitational and electromagnetic forces between elementary particles. From (7.1) we have $P_{i5} \sim j_i$, as in Eq. (2.5), but the constants of proportionality are different unless a is given the extremely small value $2K^{1/2}$. In short, in a *completely* unified theory we are not at liberty to choose even our one constant arbitrarily. In addition, it must be admitted that all five-dimensional field theories suffer from artificiality and obscurity that are difficult to avoid.

On the other hand, this theory does offer a method for treating nucleons as different states of the one particle and of formulating a classical description of charge exchange forces. It is satisfactory that Maxwell's equations, together with the supplementary condition, appear as a linear approximation to the field equations, that a modified Lorentz force equation appears as a geodesic equation, and that correspondence with classical electrodynamics occurs in the limit $a \to 0$. Short range $n-p$ and $p-p$ forces, with range of the correct order of magnitude, then arise from the theory without the adjustment of an arbitrary parameter or the introduction of meson potentials. Finally, the anomalous behaviour of null geodesic particles near point charges not only leads to a mechanism for charge exchange but also yields the possibility of the formations of systems exhibiting the general properties of mesons.

It would be very remarkable if this theory were capable of describing such processes in detail, but this does not seem likely. At present the chief asset of the theory appears to be its demonstration of the possibility of linking short-range charge-exchange forces to electromagnetic theory in a natural manner.

I am grateful to many people, especially Drs. F. T. ADLER and L. WOLFENSTEIN, for stimulating discussions.

RIASSUNTO (*)

Si dimostra che in una teoria del campo classica il neutrone e il protone possono trattarsi come stati differenti della stessa particella, assegnando loro un ulteriore grado di libertà onde specificare la carica elettrica in termini dello stesso. Ciò può farsi nel quadro di una teoria del campo unificata, modificazione della teoria di Kaluza e Klein,

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*

scegliendo la costante a di Kaluza in modo da dare l'esatta differenza di massa fra neutrone e protone. Senza l'introduzione esplicita dei potenziali mesonici o di alcun parametro libero, segue allora che esiste una attrazione a breve raggio ($\sim 10^{-13}$ cm) tra neutrone e protone, e una interazione coulombiana modificata fra due protoni. La possibilità dello scambio di carica tra nucleoni è conseguenza delle equazioni del campo e dell'equazione della geodetica del moto. Un fotone può acquistare carica e massa di riposo quando si trova estremamente prossimo a una particella carica e sorge la possibilità della formazione di sistemi di tali fotoni carichi con energie di riposo del l'ordine di 100 MeV. Senza alcuna ipotesi speciale sulla quinta coordinata x^5 segue che, trascurando in prima approssimazione tutti gli altri potenziali, i potenziali elettromagnetici soddisfano le equazioni di Maxwell e sono indipendenti da x^5. Si stabilisce l'accordo con l'elettrodinamica classica nei limiti di $a \to 0$.

Determinazione della radiaottività di una pegmatite di Delianova mediante emulsioni nucleari esposte a strati di roccia polverizzata e compressa ed a sezioni sottili.

S. Milone Tamburino

Istituto di Fisica dell'Università - Catania

A. Stella

Istituto di Mineralogia dell'Università - Catania

(ricevuto il 3 Gennaio 1952)

Riassunto. — Viene descritto l'uso di polveri di roccia compresse per la misura della quantità di sostanza radioattiva contenuta in una roccia. Studiando in particolare la radioattività di una pegmatite di Delianova (Reggio Calabria), si trova una concentrazione di $(2{,}9 \pm 0{,}003)\ 10^{-5}$ g di Uranio per grammo di pegmatite. Mediante sezioni sottili sono state fatte le identificazioni dei minerali radioattivi di tale pegmatite e la determinazione approssimata della loro radioattività. I principali minerali radioattivi contenuti nella pegmatite esaminata sono uraninite e torbernite.

1. – Introduzione.

Vari Autori [1] hanno usato la tecnica delle emulsioni nucleari per lo studio della radioattività delle roccie. Per la determinazione della quanittà di sostanza radioattiva contenuta in una roccia sono stati usati dei blocchetti di roccia con una faccia ben levigata [2] [3] [4], delle sezioni sottili [5] [6], delle

(1) Vedere le bibliografia data da: H. Yagoda: *Radioactive Measurements with Nuclear Emulsions* (New York, 1949).
(2) V. I. Baranov e S. I. Kretschmer: *Compt. Rend. Acad. Sci. U.R.S.S.*, 1, 543 (1935).
(3) I. Curie: *Journ. Phys. Rad.*, 7, 313 (1946).
(4) R. Coppens: *Bull. Soc. Franc. Min. Crist.*, 73, 217 (1950).
(5) A. Hee: *Compt. Rend.*, 227, 356 (1948).
(6) E. E. Picciotto: *Bull. Soc. Belge Geol. Paleont. Hyd.*, 58, 75 (1949).

piccole quantità note di roccia polverizzata inglobate nell'emulsione (7) (8) (9), delle polveri di roccia incollate su un cartone che veniva pressato sull'emulsione (4).

In questa nota descriviamo il metodo delle polveri di roccia compresse che ci sembra presenti dei vantaggi di precisione e di semplicità rispetto ai precedenti metodi.

Abbiamo poi studiato la radioattività di una pegmatite di Delianova (Reggio Calabria) determinando la quantità di sostanza radioattiva contenuta nella roccia mediante polveri compresse e identificando i centri radioattivi emittenti e misurando approssimativamente il loro contenuto radioattivo con il metodo delle sezioni sottili.

2. – Determinazione della quantità di sostanza radioattiva contenuta in una roccia col metodo delle polveri compresse.

Per avere una distribuzione più omogenea dei minerali radioattivi contenuti in una roccia, abbiamo polverizzato e rimescolato lungamente una certa quantità di essa e pressato parte della polvere ottenuta entro un supporto di ottone, fino ad ottenere uno strato solido con una superficie perfettamente piana e compatta.

Tale superficie veniva posta a contatto con l'emulsione fotografica. La quantità di roccia da polverizzare è direttamente proporzionale alla grossezza della grana della roccia. La polverizzazione non si è spinta oltre i 50 μ per non rendere sensibile la perdita dell'emanazione.

Si potrebbe notare che la densità dello strato di polvere compressa non risulta sempre uguale a quella della roccia, ma ciò non ha alcuna importanza perchè la densità non figura nella formula usata per il calcolo della quantità di sostanza radioattiva contenuta nella roccia (v. Appendice).

Per la determinazione del contenuto radioattivo di una roccia, lo strato di polvere compressa presenta i seguenti vantaggi rispetto agli altri metodi:

A) Rispetto al metodo dei blocchetti di roccia levigati:

1) La distribuzione omogenea delle sostanze radioattive nello strato di polvere compressa consente una determinazione piuttosto precisa mediante l'esplorazione di una superficie relativamente piccola di emulsione fotografica, mentre nel caso di una superficie di roccia levigata, specialmente per roccia

(7) S. A. Tyler e J. J. Marais: *Journ. Sed. Petr.*, **11**, 145 (1941).

(8) P. Demers: *Phys. Rev.*, **70**, 974 (1946); *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **22**, n. 1, 31 (1947).

(9) R. D. Evans: *Phys. Rev.*, **45**, 29 (1934); R. D. Evans e C. Goodman: *Phys. Rev.*, **65**, 216 (1944).

a grana grossa, occorre esplorare una superficie molto più grande per ottenere la stessa precisione.

2) Usando polveri di roccia compresse si ha la sicurezza di ritrovarvi gli elementi friabili della roccia che spesso vanno perduti nella preparazione delle superfici levigate.

3) Si ha un rimpicciolimento dei centri radioattivi e quindi maggiore facilità di conteggio delle particelle.

B) Rispetto al metodo delle sezioni sottili, oltre a quanto si è detto per i blocchetti di roccia levigati, si consegue il vantaggio di una maggiore precisione nel calcolo della quantità di sostanza radioattiva fatto con la formula di CURIE (3) che è stata calcolata per uno spessore dello strato di roccia maggiore del percorso in essa delle particelle α da essa emesse.

Questa condizione, realizzata nel caso dello strato di polvere compressa, non è sempre soddisfatta nel caso della sezione sottile. Infatti una sezione sottile utilizzabile per le osservazioni mineralogiche, non deve superare lo spessore di 30 μ; mentre spesso il percorso in roccia delle α emesse supera i 30 μ.

C) Rispetto al metodo delle polveri di roccia inglobate nelle emulsioni:

1) Col metodo delle polveri inglobate si ha una perdita sensibile di emanazione, dato che la roccia viene polverizzata in granelli dell'ordine del micron.

2) Il metodo delle polveri inglobate richiede una tecnica molto più complessa di quella delle polveri compresse e precisamente:

a) determinazione molto precisa del peso della piccola quantità di roccia inglobata nell'emulsione;

b) riduzione della roccia a granelli dell'ordine del micron.

La superficie levigata dello strato di polvere compressa viene tenuta a contatto con l'emulsione fotografica (Ilford C_2 ed E_1 spesse 50 μ) mediante nastro adesivo e l'insieme, avvolto in carta nera, si pone in un essiccatore tenuto in ghiacciaia per tutto il tempo di esposizione.

Lo sviluppo delle lastre è stato eseguito (10) subito dopo il periodo di esposizione.

Per il calcolo del contenuto totale in sostanza radioattiva, si determinano anzitutto i tipi di famiglie radioattive contenuti nella roccia in esame, misu-

---

(10) Le lastre sono state sviluppate alla temperatura costante di 18 °C e agitando i seguenti bagni:

1) Sviluppo: una parte di D 19 in 4 parti di acqua distillata; durata 30 min.

2) Bagno di frenamento: soluzione al 2% di acido acetico in acqua distillata; durata 15 min.

3) Fissaggio: soluzione di iposolfito al 35% in acqua distillata: durata 1.5 volte il tempo occorrente perchè le lastre diventino trasparenti.

4) Lavaggio 3 ore in acqua corrente, più 15 min in acqua distillata.

rando la lunghezza effettiva [11] delle tracce di particelle α osservate sull'emulsione fotografica esposta allo strato di polvere compressa.

Dato che la lunghezza massima delle tracce delle particelle α è di 38 μ (RaC') per le famiglie dell'Uranio e dell'Attinio e di 48 μ (ThC'), per la famiglia del Torio la roccia contiene solo le famiglie uranio-attinio se la lunghezza effettiva di tutte le tracce è inferiore a 39 μ.

Se ci sono anche tracce più lunghe di 39 μ si determina il rapporto delle concentrazioni in Uranio e in Torio mediante la seguente formula di CURIE [3]:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 0{,}8 + 3{,}3\,\frac{C_{\mathrm{U}}}{C_{\mathrm{Th}}}\,, \tag{1}$$

dove:

ν_1 = numero di tracce con lunghezza effettiva superiore a 39 μ;

ν_2 = numero di tracce con lunghezza effettiva compresa fra 32 μ e 39 μ;

C_{U} = concentrazione in g di Uranio per g di roccia;

C_{Th} = concentrazione in g di Torio per g di roccia.

CURIE [3] ha elaborato una formula che permette di determinare la quantità di sostanza radioattiva contenuta in una roccia in equilibrio radioattivo, in funzione del numero di particelle α emesse, per cm² e per secondo, da una superficie levigata di uno strato di roccia posta a contatto con una emulsione fotografica. Il calcolo è stato eseguito per uno spessore dello strato di roccia maggiore del percorso in roccia delle particelle α da essa emesse. YAGODA [1] usa una formula analoga a quella di CURIE ma più precisa, perchè v'introduce i valori sperimentali recentemente ottenuti per il numero di particelle α emesse rispettivamente da un grammo di Uranio o di Torio in equilibrio radioattivo.

Usando un procedimento in parte uguale a quello di CURIE e in parte a quello di YAGODA, si ha (Appendice):

$$C_{\mathrm{U}} = \frac{n_{\mathrm{U}} K_1}{7{,}5}\,; \tag{2}$$

$$C_{\mathrm{Th}} = \frac{n_{\mathrm{Th}} K_1}{2{,}23}\,; \tag{3}$$

$$n_{\mathrm{U.Th}} = \frac{(7{,}5\, C_{\mathrm{U}} + 2{,}23\, C_{\mathrm{Th}})}{K_1}\,, \tag{4}$$

---

[11] La lunghezza effettiva delle tracce di particelle α è stata eseguita misurando ad ingrandimento 1 050× la proiezione della traccia nel piano della lastra fotografica mediante un oculare avente 100 divisioni da 0,74 μ ognuna e determinando la proie-

dove:

C_U, C_{Th} = concentrazione in g di U o di Th per g di roccia;

n_U, n_{Th}, $n_{U,Th}$ = numero di tracce di particelle α più lunghe di 3 μ in emulsione emesse per cm² e per secondo;

$K = \sum_i \frac{S_i C_i}{A_i}$ con C_i = concentrazione degli atomi di peso atomico A_i e di potere frenante S_i.

Si applica la (2) se la radioattività è dovuta solo ad Uranio, la (3) se è dovuta solo a Torio e la (1) e la (4) se all'Uranio e al Torio. È bene correggere i valori di n_U, n_{Th}, ed $n_{U,Th}$ per le tracce di contaminazione radioattiva provenienti da sostanze radioattive contenute nella lastra fotografica.

Per tale correzione abbiamo determinato il numero di α (aventi un estremo sulla superficie dell'emulsione) su una lastra non esposta presa dallo stesso pacco, tenuta nelle stesse condizioni di temperatura, umidità e pressione e sviluppata assieme a quelle esposte alle polveri compresse.

Per verificare l'esattezza del metodo, abbiamo preparato degli strati di polvere compressa mescolando quantità note di un sale di Uranio (acetato di Uranio diidrato) e di una sostanza inerte (carbonato di calcio) e ne abbiamo misurato il contenuto radioattivo con l'emulsione fotografica. La verifica è stata fatta per concentrazioni di $3 \cdot 10^{-5}$ e $3 \cdot 10^{-4}$ g di U per g di roccia.

Per la pegmatite di Delianova (Reggio Calabria), usando il metodo delle polveri compresse, abbiamo trovato che la radioattività è dovuta quasi esclusivamente alla famiglia dell'Uranio e che il numero di particelle α emesse per cm² e per secondo è:

$$n_U = (3{,}73 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-3}\,.$$

In base alla composizione chimica della pegmatite si è trovato $K_1 = 0{,}0584$ ed applicando la (2) si ha:

$$C_U = (2{,}9 \pm 0{,}0031) \cdot 10^{-5} \text{ g di U per g di pegmatite.}$$

3. – Esame mineralogico della pegmatite di Delianova.

La roccia alla quale si riferiscono le ricerche è una pegmatite che però porta le tracce di un successivo metamorfismo dinamico. Essa costituisce una

zione verticale della traccia mediante il movimento micrometrico di messa a fuoco del microscopio. Per la determinazione di tale proiezione verticale è stato tenuto conto della contrazione subita dalla gelatina a causa dello sviluppo (da 50 μ di spessore che aveva durante l'esposizione è passata a circa 20 μ dopo lo sviluppo).

delle tante vene e lenti di rocce tra loro affini che intersecano gli scisti cristallini della contrada « Vento » presso Delianova (Reggio Calabria) e che in qualche caso, assunta una facies aplitica, si arricchiscono tanto di muscovite in grandi lamelle da prestarsi alla estrazione di questa mica.

La pegmatite oggetto di queste ricerche è ricca di quarzo, ortoclasio e plagioclasio compreso fra i termini più acidi della serie; al contrario del quarzo, gli individui feldspatici sono distinti da un parziale idiomorfismo. Frequenti, al punto da poter essere considerati come costituenti normali, sono la tormalina ferrifera nera ed un granato roseo, aventi i caratteri dell'almandino. Raro ed accessorio, in granuli informi, è un termine del gruppo degli epidoti.

La struttura, che differisce notevolmente da quella normale delle pegmatiti per le modifiche apportatevi dal dinamometamorfismo, tende alla nematoblastica. Una parte a struttura più fine costituita da quarzo e feldspati, in un complesso ipidiomorfo portante i segni della laminazione, contiene minute scaglie di muscovite, ora curve ed ora pressate e deformate contro le superfici subsferiche degli individui icositetraedrici dell'almandino.

Quarzo e feldspati racchiudono sciami di minute inclusioni di lamelle di muscovite sempre perfettamente piane.

Nella detta massa a struttura fine, sono sparsi i blasti dei feldspati, della tormalina e dell'almandino. L'ortoclasio è torbido; nel plagioclasio (albite, albite-oligoclasio) si hanno frequenti associazioni pertitiche, non mancano mai le inclusioni microlitiche, di muscovite in prevalenza, aventi un deciso orientamento generale, rispondente ai processi petrotettonici ai quali la roccia si trovò sottoposta. Gli individui dell'almandino conservano il contorno poliedrico icositetraedrico originario e possono isolarsi talvolta dalla pegmatite conservando la loro integrità morfologica. Sono liberi da inclusioni e da anomalie ottiche.

La tormalina, pur tendendo all'idiomorfismo non lo raggiunge completamente come il granato; sia in individui euedrali, che in granuli, essa si mantiene molto povera di inclusioni. La tinta, nera in massa, va dal bruno-verdastro al violaceo in sezione; il pleocroismo varia d'intensità entro i limiti normali.

L'epidoto, accessorio e raro, in elementi dal contorno irregolare, è ricco d'inclusioni di granuli quasi opachi o appena diafani, bruni aventi netto contorno poliedrico. La roccia in esame fa parte del complesso cristallino della Calabria, di età superiore ai 500 milioni di anni, e quindi la pegmatite studiata si può considerare in equilibrio radioattivo.

4. – Identificazione dei minerali radioattivi e determinazione approssimata del loro contenuto radioattivo mediante il metodo delle sezioni sottili.

Per l'identificazione dei costituenti radioattivi abbiamo usato il metodo delle sezioni sottili (5) (6). Le sezioni sottili, spesse circa 30 μ e non coperte dal vetrino copri-oggetti, venivano tenute a contatto con emulsioni fotografiche (Ilford C_2 ed E_1 spesse 50 μ) mediante nastro adesivo. L'insieme veniva posto in un essiccatore in ghiacciaia per tutto il tempo di esposizione. Nella preparazione delle sezioni sottili sono state evitate tutte le possibili cause d'immissione nelle sezioni di sostanze radioattive estranee.

Per poter ottenere, dopo lo sviluppo dell'emulsione fotografica, una sovrapposizione della sezione sottile con l'emulsione identica a quella avuta durante il periodo di esposizione, si è impressionata l'emulsione con l'immagine della sezione sottile esponendo brevemente alla luce l'insieme sezione sottile-lastra fotografica (5) (6).

Dopo lo sviluppo si è ottenuta una precisa sovrapposizione della sezione sottile con l'emulsione fotografica, usando un obbiettivo 8,8 $\times$ ed oculari 4,5 $\times$. Avendo tale obbiettivo una piccola profondità di fuoco, è possibile vedere contemporaneamente le due superfici della sezione sottile e dell'emulsione fotografica, e quindi la sovrapposizione può farsi con facilità. Ottenuta la coincidenza fra le due immagini, si passa ad un ingrandimento maggiore (da 200 $\times$ a 500 $\times$) usando l'obbiettivo Cooke 45 $\times$ con una distanza frontale di 1,5 mm.

Per ogni centro individuato è stato fatto l'esame ottico del minerale emittente e la determinazione delle famiglie radioattive in esso contenute; in alcuni casi è stata possibile la misura approssimata del loro contenuto radioattivo.

La determinazione della quantità di sostanza radioattiva contenuta nei singoli minerali radioattivi si può fare applicando le formule (1), (2), (3) e (4) in modo analogo a quanto è stato indicato per la determinazione della radioattività totale di una roccia.

Tale misura si può considerare esatta solo se il minerale radioattivo in esame presenta uno spessore maggiore del percorso nel preparato delle particelle α da esso emesse e se la superficie occupata dal minerale nella sezione sottile non è molto piccola.

Per il conteggio dei centri radioattivi abbiamo usato un ingrandimento 1 050 $\times$ ad immersione omogenea ed un oculare fornito di reticolo quadrettato.

Esaminando due sezioni sottili della pegmatite di Delianova, abbiamo rilevato radioattività particolarmente intensa nei seguenti punti:

1) In un individuo tabulare bruno (fig. 1) con aspetto cristallino ben determinato, incluso in un cristallo di tormalina. È parzialmente translucido

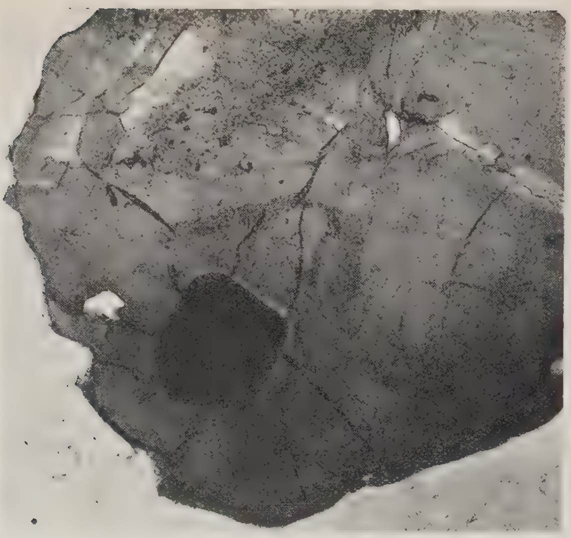


Fig. 1. Microfotografia di una sezione sottile della pegmatite di Delianova contenente un cristallo di tormalina con un incluso radioattivo attribuibile ad uraninite (microfotografia a nicol paralleli).

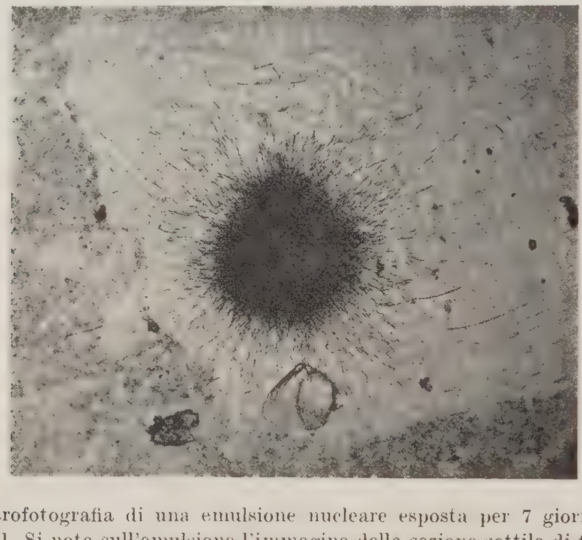


Fig. 2. Microfotografia di una emulsione nucleare esposta per 7 giorni alla sezione sottile di fig. 1. Si nota sull'emulsione l'immagine della sezione sottile di fig. 1, ottenuta esponendo brevemente alla luce l'insieme sezione sottile-emulsione fotografica. L'incluso radioattivo contiene circa il 70% di Uranio.

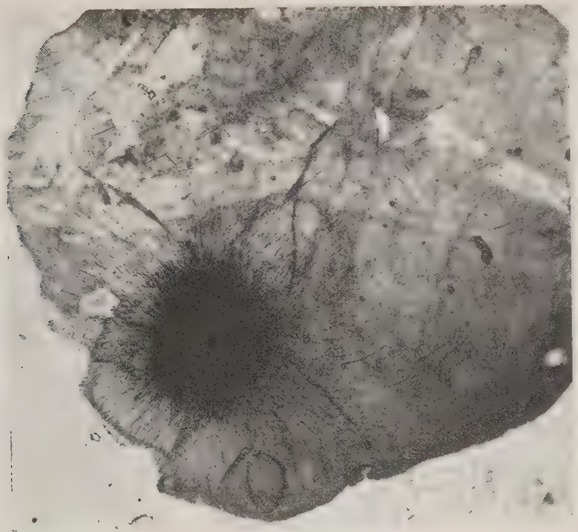


Fig. 3. – Sovrapposizione della sezione sottile di fig. 1 e dell'emulsione fotografica di fig. 2.

e lascia vedere una intensa colorazione bruna e mostra internamente una struttura granulare.

Otticamente si presenta isotropo, ma vi è da dubitare che tale isotropia ottica dipenda piuttosto da uno stato metamittico. Ad un fenomeno di iso-

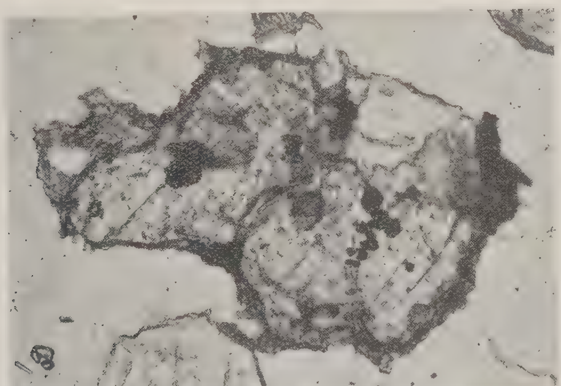


Fig. 4. – Microfotografia di una sezione sottile della pegmatite di Delianova contenente un cristallo di epidoto con numerosi inclusi neri radioattivi.

tropizzazione ed ai frequenti aumenti di volume che a questo si accompagnano, può attribuirsi il fatto osservato e visibile nella microfotografia, che dall'incluso irradiano delle fenditure, le quali interessano il cristallo ospitante di tormalina.

L'incluso radioattivo ha uno spessore eguale a quello della sezione sottile ed ha una superficie di $3{,}88 \cdot 10^{-4}$ cm². Abbiamo esposto la sezione sottile che lo conteneva a lastre fotografiche con differenti tempi di posa. Nella fig. 2 è mostrata una emulsione esposta per sette giorni e nella fig. 3 vi è la sovrapposizione della sezione sottile fig. 1 con la emulsione fotografica di fig. 2.

Il numero di particelle α (più lunghe di 3 μ) emesse per cm² e per secondo da tale incluso è di 204. Nemmeno una delle numerose tracce osservate presenta una lunghezza superiore ai 38 μ e quindi si può affermare che tale radioattività è dovuta solo agli elementi delle famiglie Uranio-Attinio.

YAGODA (1) (pag. 184), dà il numero di particelle α per cm² e per secondo (più lunghe di 0,84 cm in aria = 4,7 μ in emulsione) emesso dai vari minerali radioattivi. Per poterci servire delle indicazioni di YAGODA, abbiamo calcolato per tale incluso il numero di particelle α per cm² e per secondo più lunghe di 4,7 μ che troviamo uguale a 186. Tale attività, secondo i dati di YAGODA, è da attribuire all'uraninite (160 ÷ 215 α per cm² e per secondo).

Per il calcolo di K_{I}, non potendo determinare la composizione chimica dell'incluso, ci siamo serviti delle analisi chimiche date dal DANA (12). Abbiamo calcolato K_{I} sia per l'uraninite corrispondente all'analisi 5 (12) ricca di Uranio che per l'uraninite n. 9 (12) povera di Uranio, ottenendo rispettivamente una concentrazione in Uranio

$$C_{\mathrm{U}} = 64{,}4\,\% \qquad \text{e} \qquad C_{\mathrm{U}} = 75{,}1\,\%\,.$$

Siccome il valore di 186 α per cm² e per secondo, sta in mezzo ai due valori limiti dati da YAGODA (160 ÷ 215 α per cm² e per secondo) assumiamo anche per C_{U} il valore medio fra i due precedenti, cioè C_{U} circa 70 %.

2) In minuti microliti idiomorfi, inclusi in un cristallo di epidoto (fig. 4). Si presentano opachi od appena trasparenti in bruno. L'attività di tali inclusi in 7 giorni di posa è dimostrata dalla fig. 5; la fig. 6 risulta dalla sovrapposizione delle fig. 4 e 5.

Anche in questo caso tutte le tracce hanno lunghezza superiore a 39 μ e quindi tale radioattività è dovuta alla famiglia dell'Uranio.

Il contenuto radioattivo medio nei vari centri è molto incerto, dato che gli inclusi hanno dimensioni molto piccole, e la loro sezione non resta costante lungo tutto lo spessore della sezione sottile.

3) In un individuo ad abito prismatico non bene conservato, diafano incluso in un cristallo di almandino. Tale incluso è birifrangente con estinzione

---

(12) J. D. DANA, E. S. DANA: *System of Mineralogy* (New York, 1946), p. 612-613

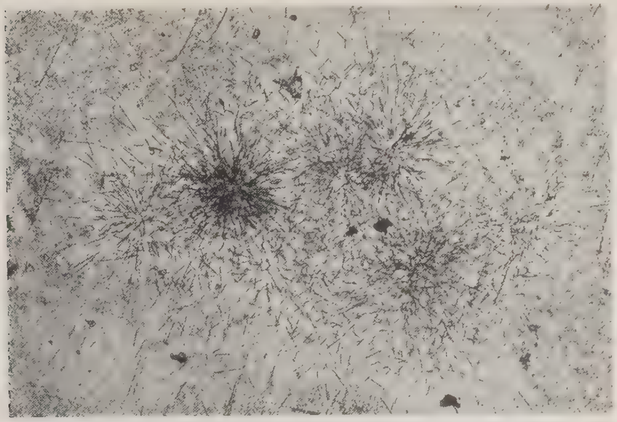


Fig. 5. — Microfotografia di una emulsione fotografica esposta per 7 giorni alla sezione sottile di fig. 4. Si notano numerosi centri radioattivi uraniferi corrispondenti agli inclusi neri dell'epidoto.

parallela all'asse del prisma ed all'unico lato rettilineo del contorno di sezione, che si identifica con quell'asse.

Il potere rifrangente (1,80 ÷ 1,83) è notevolmente più alto di quello del cristallo di almandino che lo ospita. A luce convergente si dimostra uniassico, e pur essendo il piano di sezione inclinato sull'asse ottico, resta sempre visibile nel campo una molteplice serie di anelli.

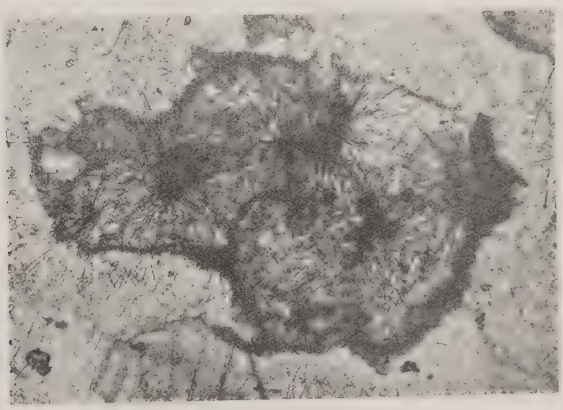


Fig. 6. Sovrapposizione delle microfotografie di fig. 4 e 5.

Il carattere della birifrangenza è positivo. L'incluso è da ritenere come un individuo di zircone.

Nell'interno, alla sua volta, sono distribuiti alcuni gruppi di minuti inclusi, privi di contorno poligonale ed opachi. L'area dello zircone è di $3{,}32 \cdot 10^{-4}$ cm²; il numero delle particelle α per cm² e per secondo è di 16,8. Contiene Torio oltre che Uranio.

Il rapporto delle concentrazioni in Torio ed in Uranio è:

$$\frac{C_{\mathrm{Th}}}{C_{\mathrm{U}}} = 5{,}34 \; ,$$

ed il contenuto radioattivo globale è di circa 5,8 %. Pare che tale radioattività sia da attribuire più agli inclusi che allo zircone.

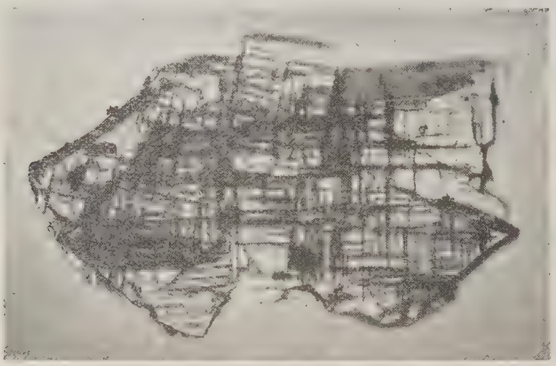


Fig. 7. – Microfotografia di un cristallino di torbernite della pegmatite di Delianova. Ingrandimento 150×, nicol paralleli.

4) In alcuni individui lamellari di un minerale di aspetto micaceo, che si annidano in piccole cavità della pegmatite e che si rivelano mediante una viva fluorescenza, quando vengono sottoposti alla irradiazione di una lampada per l'ultravioletto. L'effetto luminoso vivacissimo, si manifesta con la emissione dei raggi di un verde pallido caratteristico. Date le piccolissime dimensioni, è ben difficile ricavare cristalli adatti per le misure. Essi però presentano una morfologia ben evidente e complessa.

In un unico caso si osservò una lamella a contorno esagonale irregolare (fig. 7) con due angoli opposti di 90° e gli altri 4, uguali di 135°.

La lunghezza massima è di 0,5 mm. Al microscopio si osserva un doppio sistema di strie parallele, ortogonali, che simulano una sfaldatura molto facile, ma che potrebbero dipendere da eterogeneità di altra natura del cristallo. Detti sistemi di strie sono disposti a 45° rispetto ai lati ortogonali dell'esagono

sopraricordato. È dovuta senza dubbio a sfaldatura la facilissima divisibilità secondo il piano di maggiore sviluppo delle lamelle. L'indice medio di rifrazione è prossimo ad 1,60 (per immersione). L'estinzione è parallela rispetto alla diagonale dell'esagono passante per i vertici degli angoli di 90°. Il cristallo è otticamente biassico e la bisettrice acuta è normale al piano dello sviluppo tabulare.

Il carattere della birifrangenza è negativo; il piano degli assi ottici è normale alla diagonale anzidetta. L'angolo degli assi è piuttosto piccolo. Il peso specifico risulta appena inferiore a 3,64. I caratteri riscontrati confermerebbero la diagnosi della torbernite, fatta precedentemente ma meno completamente dall'ANFOSSO ([13]) il quale argomentò la presenza di tale specie, accanto alla muscovite, in altra lente pegmatitica del medesimo giacimento di Delianova. Essendo la torbernite friabile, non è stata riscontrata nelle sezioni sottili. Il cristallino, usato per la diagnosi mineralogica, posto sulla emulsione fotografica, ha dato tracce di lunghezza inferiore a 39 μ e quindi la sua radioattività è attribuibile all'Uranio.

Tale torbernite è un prodotto secondario formatosi durante il raffreddamento della pegmatite.

Dalle osservazioni fatte si può concludere che gli elementi radioattivi sono contenuti in primo luogo in una serie di inclusi di origine primaria, attribuibili in parte ad uraninite, e nella torbernite, prodotto secondario, le lamelle della quale si annidano nelle cavità della roccia.

APPENDICE

CURIE ([3]) e YAGODA ([1]) hanno adattato una formula di EVANS ([9]) per il calcolo della quantità di sostanza radioattiva contenuta in una roccia in equilibrio radioattivo, nel caso che lo strato di roccia messo a contatto dell'emulsione abbia uno spessore maggiore del percorso in roccia delle particelle α emesse dagli elementi delle famiglie radioattive contenute nella roccia in esame.

(Il percorso R' di ogni tipo di particella α nella roccia si calcola con la relazione: $R' = KR$, dove R è il percorso in aria a 15 °C e 760 mm Hg e K è il fattore di frenamento, del quale ci occuperemo in seguito).

Per ogni elemento radioattivo contenuto nella roccia, il numero n di particelle α emesse per cm² e per secondo, è dato dalla seguente formula:

$$n = \frac{N}{4} K(R - \varrho) \,, \tag{1'}$$

dove:

N = numero di particelle α emesse per cm³ e s;

R = percorso del tipo di particelle α emesse, espresso in cm in aria a 15 °C e 760 mm Hg;

([13]) A. ANFOSSO: *Boll. Soc. Naturalisti Napoli*, 52, 99 (1942).

ϱ = lunghezza minima delle tracce osservabili nell'emulsione espressa in cm in aria a 15 °C e 760 mm Hg;

K = fattore di frenamento dato da (3);

$$K = \frac{0{,}85 \cdot 10^{-4}}{\mathrm{d}K_1}\,, \tag{2'}$$

con

$$K_1 = \sum_i \frac{S_i c_i}{A_i}\,, \tag{3'}$$

dove:

d = densità della roccia;

S_i = potere frenante dei vari elementi costituenti la roccia;

c_i = concentrazione dei vari elementi costituenti la roccia;

A_i = peso atomico dei vari elementi costituenti la roccia.

Nel caso di una roccia in equilibrio radioattivo che contenga gli elementi della famiglia dell'Uranio (1), la (1'), tenendo conto della (2') diventa:

$$n_{\mathrm{U}} = 0{,}2125 \cdot 10^{-4}\, \frac{N_{\mathrm{U}}}{\mathrm{d}K_1}\, (\overline{R}_{\mathrm{U}} - \varrho)\,, \tag{4'}$$

dove:

N_{U} = numero di particelle α emesse da tutta la famiglia dell'Uranio, per cm³ di roccia e per secondo;

$\overline{R}_{\mathrm{U}}$ = percorso effettivo medio delle particelle α della famiglia dell'Uranio, espresso in cm di aria a 15 °C e 760 mm Hg.

Un grammo di Uranio è composto da 0,9928 parti di $\mathrm{U_I} + \mathrm{U_{II}}$ e di 0,0720 parti di AcU. In condizioni di completo equilibrio radioattivo, un grammo di Uranio $\mathrm{U_I}$ emette un totale di $9{,}9 \cdot 10^4$ particelle α/s ed 1 g di AcU emette $5{,}58 \cdot 10^5$ particelle α/s.

Se una roccia contiene C_{U} g di Uranio per grammo di roccia, il numero di particelle α emesse da un grammo di roccia è dato da:

$$N_{\mathrm{U}} = \nu_{\mathrm{U}}\, \mathrm{d} C_{\mathrm{U}}\,, \tag{5'}$$

dove ν_{U} è il numero di particelle α emesse da 1 g di U in equilibrio radioattivo.

Tenendo conto della (5') la (4') diventa:

$$n_{\mathrm{U}} = \frac{0{,}2125 \cdot 10^{-4}}{K_1}\, C_{\mathrm{U}}[0{,}9928 \cdot 9{,}9 \cdot 10^4 (\overline{R}_{\mathrm{U}} - \varrho) + 0{,}0072 \cdot 5{,}58 \cdot 10^5 (R_{\mathrm{AcU}} - \varrho)]\,,$$

ed essendo R_{U} = 3,96 cm in aria a 15 °C e 760 mm Hg,

$\overline{R}_{\mathrm{AcU}}$ = 4,71 cm in aria a 15 °C e 760 mm Hg:

$$n_{\mathrm{U}} = \frac{0{,}2125}{K_1}\, C_{\mathrm{U}}[9{,}828(3{,}96 - \varrho) + 0{,}402\,(4{,}71 - \varrho)]\,. \tag{6'}$$

Svolgendo un calcolo analogo per la famiglia del Torio, sapendo che 1 g di Th in equilibrio radioattivo emette $\nu_{Th} = 2{,}46 \cdot 10^4\ \alpha/s$ e che $\bar{R}_{Th} = 4{,}81$ cm in aria a 15 °C e 760 mm Hg, si ha:

$$(7') \qquad n_{Th} = \frac{0{,}2125}{K_1} C_{Th}\, 2{,}46(4{,}81 - \varrho) = \frac{0{,}524}{K_1} C_{Th}(4{,}81 - \varrho)\,.$$

Infine se una roccia contiene C_U grammi di Uranio e C_{Th} grammi di Torio per grammo di roccia, il numero di particelle α emesse per cm² e per secondo sarà:

$$(8') \qquad n_{U,Th} = \frac{0{,}2125}{K_1} \{C_U[9{,}828\,(3{,}96 - \varrho) + 0{,}402(4{,}71 - \varrho)] + C_{Th}\, 2{,}46(4{,}81 - \varrho)\}.$$

Prendendo $\varrho = 3\ \mu$ in emulsione $= 0{,}54$ cm in aria a 15 °C e 760 mm Hg, le (6′), (7′), (8′) diventano rispettivamente:

$$(9') \qquad C_U = \frac{n_U K_1}{7{,}5}\,;$$

$$(10') \qquad C_{Th} = \frac{n_{Th} K_1}{2{,}23}\,;$$

$$(11') \qquad n_{U,Th} = \frac{7{,}5 C_U + 2{,}23 C_{Th}}{K_1}\,.$$

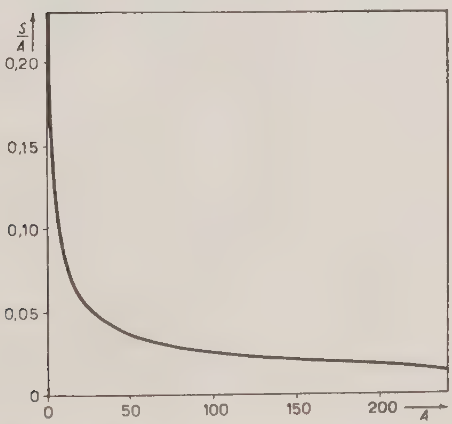


Fig. 8. - Grafico che dà il rapporto fra il potere frenante S ed il peso atomico A in funzione del peso atomico A.

Il calcolo di K_1 [formula (3′)] è stato fatto ricavando il rapporto S_i/A_i dalla curva di fig. 8 ottenuta portando in ascisse il peso atomico A_i ed in ordinate il rapporto S_i/A_i. I valori di S_i sono stati ricavati da quelli della

permeabilità ψ determinata da WALKER [(1), p. 84] mediante la relazione:

$$S_i = \frac{A_i \psi_a}{A_a \psi_i} = 0{,}2665 \frac{A_i}{\psi_i},$$

dove: ψ_a = permeabilità dell'aria a 15 °C e 760 mm Hg;

A_a = peso atomico dell'aria a 15 °C e 760 mm Hg;

ψ_i = permeabilità dell'elemento di peso atomico A_i.

Ringraziamo vivamente il prof. F. STELLA STARRABBA, Direttore dell'Istituto di Mineralogia per gli utili consigli datici.

Ringraziamo pure il prof. C. BELLIA, Direttore dell'Istituto di Fisica, per aver agevolato tale studio.

SUMMARY

The measurements of the quantity of radioactive elements contained in a rock, is performed exposing the nuclear emulsion to a layer of pulverized and compressed rock. Studying a pegmatyte of Delianova (Reggio Calabria), a concentration of $2{,}9 \cdot 10^{-5}$ g of Uranium for gram of pegmatyte has been obtained. The identification of radioactive ores contained in the rock and the approximated determination of their radioactivity have been performed using polished thin sections. The main radioactive ores of this pegmatyte are uraninite and torbernite.

IL NUOVO CIMENTO Vol. IX, N. 3 1 Marzo 1952

Sul regime transitorio dei reattori nucleari con diffusore.

S. Gallone e L. Orsoni
Istituto di Fisica dell'Università e Laboratori CISE - Milano

(ricevuto il 9 Gennaio 1952)

Riassunto. — Viene studiata l'influenza del diffusore (o riflettore) sul comportamento transitorio dei reattori nucleari, di cui vengono determinati il lato critico e le costanti di tempo. Lo studio è limitato al caso in cui si prendano in considerazione i soli neutroni istantanei.

In vari lavori precedenti è stato studiato il comportamento transitorio dei mezzi moltiplicanti privi di diffusore (1), (2), (3). Si vogliono ora estendere alcuni risultati di queste trattazioni al caso in cui il mezzo moltiplicante sia circondato da un diffusore di neutroni; questo caso riveste particolare importanza per la sua applicazione ai reattori nucleari. Nel seguito useremo i simboli adottati nei lavori di C. Salvetti (1) e (2) relativi al regime transitorio dei reattori privi di diffusore.

1. – L'equazione relativa alla densità $n(\boldsymbol{r}, t)$ dei neutroni termici entro il mezzo moltiplicante è, in assenza di termini di sorgente artificiali, la seguente:

$$L^2\nabla^2 n(\boldsymbol{r}, t) + (k_\infty \exp[\tau\nabla^2] - 1)n(\boldsymbol{r}, t) = \tau_c \frac{\partial n(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\,. \tag{1}$$

Nel diffusore la densità $\bar{n}(\boldsymbol{r}, t)$ dei neutroni termici soddisfa invece alla equazione:

$$\bar{D}\nabla^2\bar{n}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{\bar{n}(\boldsymbol{r}, t)}{\bar{\tau}_c} = \frac{\partial \bar{n}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}\,, \tag{2}$$

---

(1) C. Salvetti: *Nuovo Cimento*, **6**, 303 (1949).
(2) C. Salvetti: *Nuovo Cimento*, **6**, 413 (1949).
(3) S. Gallone, L. Orsoni e C. Salvetti: *Nuovo Cimento*, **8**, 960 (1951).

dove $\bar{D}$ è il coefficiente di diffusione dei neutroni termici entro il diffusore e $\bar{\tau}_c$ la loro vita media per cattura. Anche nella (2) è assente il termine di sorgente artificiale.

Le (1) e (2) sono equazioni approssimate in quanto non tengono conto della migrazione dei neutroni veloci dal mezzo moltiplicante al diffusore e viceversa. Sotto questo aspetto la presente approssimazione è del tipo di quella adottata nella teoria ad un gruppo di neutroni ([4]). Le (1) e (2) vanno completate con le seguenti condizioni al contorno: continuità della densità e del flusso di neutroni termici sulla superficie σ_{MD} di separazione tra mezzo moltiplicante e diffusore e annullamento della loro densità sulla superficie esterna σ_D del diffusore:

$$\left.\begin{aligned} &(3) \qquad n(\boldsymbol{r}, t) = \bar{n}(\boldsymbol{r}, t) \\ &(4) \qquad D\,\frac{\mathrm{d}n(\boldsymbol{r}, t)}{\mathrm{d}\nu} = \bar{D}\,\frac{\mathrm{d}\bar{n}(\boldsymbol{r}, t)}{\mathrm{d}\nu} \end{aligned}\right\} \quad \text{su} \quad \sigma_{MD}$$

$$(5) \qquad \bar{n}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \qquad \text{su} \quad \sigma_D\,,$$

dove $D = L^2/\tau_c$ è il coefficiente di diffusione dei neutroni termici entro il mezzo moltiplicante e $\mathrm{d}/\mathrm{d}\nu$ indica la derivata normale sulla superficie σ_{MD}.

Ponendo $n(\boldsymbol{r}, t) = \varrho(\boldsymbol{r})T(t)$ si ha dalla (1)

$$T(t) = T(0)\exp\left[\mu t\right]\,, \tag{6}$$

$$L^2\nabla^2\varrho(\boldsymbol{r}) + (k_\infty \exp\left[\tau\nabla^2\right] - 1 - \mu\tau_c)\varrho(\boldsymbol{r}) = 0\,. \tag{7}$$

Imponendo alla $\varrho(\boldsymbol{r})$ di soddisfare inoltre alla equazione

$$\nabla^2\varrho(\boldsymbol{r}) + \omega^2\varrho(\boldsymbol{r}) = 0\,, \tag{8}$$

si ha dalla (7)

$$\mu(\omega) = -\frac{1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp\left[-\tau\omega^2\right]}{\tau_c}\,. \tag{9}$$

Similmente per la densità dei neutroni termici entro il diffusore, posto $\bar{n}(\boldsymbol{r}, t) = \bar{\varrho}(\boldsymbol{r})T(t)$, si ottiene dalla (2) l'equazione:

$$\bar{L}^2\nabla^2\bar{\varrho}(\boldsymbol{r}) - (1 + \mu\bar{\tau}_c)\bar{\varrho}(\boldsymbol{r}) = 0\,, \tag{10}$$

dove $\bar{L}^2 = \bar{D}\bar{\tau}_c$.

Le equazioni (8) e (10) vanno naturalmente risolte con le condizioni al contorno che si ottengono dalle (3), (4) e (5) sostituendo in queste $\varrho(\boldsymbol{r})$ e $\bar{\varrho}(\boldsymbol{r})$ rispettivamente a $n(\boldsymbol{r}, t)$ e $\bar{n}(\boldsymbol{r}, t)$. Ciò conduce alla determinazione degli autovalori ω_n e delle corrispondenti costanti di tempo μ_n date dalla (9).

([4]) Vedi H. SOODAK e C. E. CAMPBELL: *Elementary Pile Theory* (New York, 1950).

2. – Applichiamo le considerazioni precedenti al calcolo del lato critico e delle costanti di tempo relative ad una pila « piatta » di spessore $2a$ rivestita da un diffusore di spessore s (fig. 1). In questo caso (unidimensionale) le equazioni (8) e (10) si scrivono

$$\frac{d^2\varrho(x)}{dx^2} + \omega^2\varrho(x) = 0\,, \tag{11}$$

$$\frac{d^2\varrho(x)}{dx^2} - \frac{1+\mu\bar{\tau}_c}{\bar{L}}\,\bar{\varrho}(x) = 0\,. \tag{12}$$

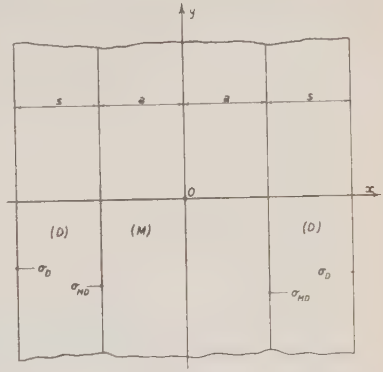


Fig. 1.

Si trova facilmente che gli autovalori ω_n relativi alle condizioni al contorno sopracitate sono dati dalle equazioni trascendenti seguenti:

$$\left.\begin{array}{lr} (13) & \operatorname{tg}\omega a \\ (14) & -\operatorname{ctg}\omega a \end{array}\right\} = \frac{\bar{D}}{D\omega\bar{L}}\sqrt{1+\mu\bar{\tau}_c}\cdot \operatorname{ctgh}\left[\frac{\sqrt{1+\mu\bar{\tau}_c}}{\bar{L}}\,s\right],$$

ove μ è dato in funzione di ω dalla (9).

Gli autovalori forniti dalla (13) sono relativi ad autofunzioni simmetriche e quelli dati dalla (14) ad autofunzioni antisimmetriche.

I semilati critici a_c corrispondenti alla stabilità ($\mu = 0$) di una generica delle autofunzioni sopracitate si ottengono ricavando a_c dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{lr} (17) & \operatorname{tg}\beta a_c \\ (18) & -\operatorname{ctg}\beta a_c \end{array}\right\} = \frac{\bar{D}}{D\beta\bar{L}}\operatorname{ctgh}\frac{s}{\bar{L}}\,,$$

che si deducono dalle (13) e (14) ponendo in queste $a = a_c$, $\mu = 0$ e $\omega = \beta$, essendo β una delle due radici reali della equazione in ω

$$1 + \omega^2 L^2 - k_\infty \exp\left[-\tau\omega^2\right] = 0 \qquad (k_\infty > 1). \tag{19}$$

In particolare il semilato critico della pila è la minore delle soluzioni a_c delle equazioni (17) e (18); ossia è soluzione della equazione

$$\operatorname{tg}\beta a_c = \frac{\bar{D}}{D\beta\bar{L}}\operatorname{ctgh}\frac{s}{\bar{L}} \qquad \left(0 < \beta a_c < \frac{2}{\pi}\right). \tag{20}$$

3. – A titolo di esempio svolgiamo il calcolo numerico del lato critico e delle costanti di tempo relativi ad una pila « piatta » inomogenea ad Uranio naturale e grafite. Assumiamo i seguenti valori delle costanti caratteristiche

del mezzo moltiplicante e del diffusore:

$$\begin{aligned}
K_\infty &= 1{,}1\\
f &= \text{fattore di utilizzazione termica} = 0{,}88\\
\bar{L} &= 50 \ \text{cm}\\
L &= \bar{L}\sqrt{1-f} = 17{,}3 \ \text{cm}\\
\bar{\tau}_c &= 1{,}23 \cdot 10^{-2} \ \text{s}\\
\tau_c &= \bar{\tau}_c(1-f) = 1{,}47 \cdot 10^{-3} \ \text{s}\\
\tau &= 400 \ \text{cm}^2\\
s &= 50 \ \text{cm}\,.
\end{aligned}$$

In questo caso il laplaciano numerico β^2, radice della (19), risulta:

$$\beta^2 = 1{,}4 \cdot 10^{-4} \ \text{cm}^{-2}\,.$$

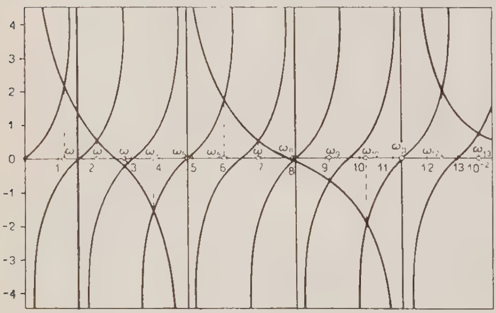


Fig. 2. – Ricerca grafica degli autovalori ω_n. Le curve a derivata >0 corrispondono ai primi membri e le curve a derivata <0 ai secondi membri delle equazioni (13) e (14).

La (20) a sua volta fornisce per il semilato critico il valore:

$$a_c = 97 \ \text{cm}\,. \tag{21}$$

Calcoliamo gli autovalori ω_n e le costanti di tempo μ_n nell'ipotesi che la pila sia critica cioè per a_c dato dalla (21).

Risolvendo graficamente le (13) e (14) (fig. 2) si ricavano gli autovalori $\omega_1, \omega_2, \dots$.

Le costanti di tempo corrispondenti, calcolate mediante la (9), sono riportate nella seguente tabella. In questa figurano anche le costanti di tempo $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots$ relative alla pila nuda critica ($a_c^* = 132$ cm, $s = 0$).

μ_1	$0 \ \text{s}^{-1}$	μ_1^*	$0 \ \text{s}^{-1}$	Costanti di tempo relative alla pila con diffusore (μ) e alla pila nuda (μ^*).
μ_2	$-\ 200$ »	μ_2^*	$-\ 165$ »	
μ_3	$-\ 485$ »	μ_3^*	$-\ 330$ »	
μ_4	$-\ 830$ »	μ_4^*	$-\ 555$ »	
μ_5	$-\ 1\,210$ »	μ_5^*	$-\ 870$ »	
μ_6	$-\ 1\,610$ »	μ_6^*	$-\ 1\,240$ »	
μ_7	$-\ 2\,030$ »	μ_7^*	$-\ 1\,575$ »	
μ_8	$-\ 2\,485$ »	μ_8^*	$-\ 1\,930$ »	

Si vede dalla tabella che la pila critica con diffusore è meno inerte della pila critica nuda (a parità di caratteristiche del mezzo moltiplicante) come del resto è facilmente intuibile. I presenti risultati hanno tuttavia limitata importanza in quanto non è stato tenuto conto della presenza dei neutroni ritardati che saranno presi in considerazione in un ulteriore studio.

SUMMARY

The influence of the reflector on the transient behaviour of a nuclear reactor is considered, taking into account the prompt neutrons only. The critical size and the time constants are numerically evaluated for the case of a «flat» reactor.

Sulla propagazione di sottili fasci luminosi in liquidi attraversati da ultrasuoni.

F. Porreca
Istituto di Fisica dell'Università - Napoli

(ricevuto il 10 Gennaio 1952)

Riassunto. — In questo lavoro viene preso in esame il fenomeno del passaggio attraverso liquidi soggetti ad ultrasuoni di un fascio di luce monocromatica, il cui spessore è dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda ultrasonora. In queste condizioni, scompaiono le righe diffratte dovute alla presenza del reticolo di fase ultracustico ed appare l'immagine molto allargata della fenditura luminosa. L'andamento dell'intensità lungo tale figura, a parità di certe condizioni di esperienza, dovrebbe dipendere solo dalla forma dell'onda ultrasonora. Si mette in evidenza, invece, una certa diversità fra i liquidi esaminati.

La figura di diffrazione che si ottiene quando in un liquido si propagano ultrasuoni, usando come sorgente luminosa una fenditura, dipende dallo spessore d del fascio di luce emergente dal mezzo perturbato, dalla lunghezza d'onda λ degli ultrasuoni e dalla variazione dell'indice di rifrazione [1]. Nel caso in cui tale spessore d sia molto maggiore di λ, $d \gg \lambda$, nel piano focale di una lente convergente, su cui incida il fascio di luce parallela modulato dagli ultrasuoni, appare l'immagine della fenditura accompagnata lateralmente da altre righe luminose, equidistanti fra loro e simmetricamente disposte rispetto alla immagine centrale.

Quando lo spessore d del detto fascio di luce è invece dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda degli ultrasuoni, $d \sim \lambda$, non compaiono più le righe di diffrazione, bensì si nota che l'immagine centrale non è più

(1) R. Lucas e P. Biquard: *Journ. de Phys.*, 7, 464 (1932).

netta ma appare allargata. Questo allargamento del fascio di luce è tanto più vistoso quanto maggiore è l'intensità degli ultrasuoni e quanto più lungo è il tratto luminoso sollecitato dagli ultrasuoni [2].

Oggetto del presente lavoro è lo studio più particolareggiato di questo fenomeno di diffrazione, e cioè la determinazione quantitativa dell'andamento dell'intensità luminosa lungo tale figura di diffrazione. Con spessore del fascio di luce emergente dal mezzo sottoposto agli ultrasuoni dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda λ degli ultrasuoni nel mezzo considerato $d \sim \lambda$, l'andamento della luce diffratta deve dipendere dalla forma dell'onda ultrasonora nel mezzo considerato, e quindi la conoscenza dell'andamento dell'intensità della luce diffratta da un'onda ultrasonora può costituire un criterio per studiare l'effettiva forma di questa nei vari mezzi.

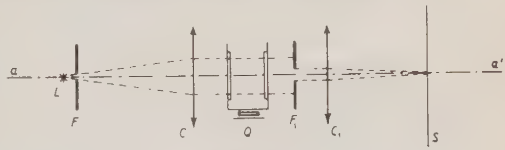


Fig. 1.

Il dispositivo sperimentale è quello ben noto (fig. 1). Esso permette di osservare nel piano focale S della lente convergente C_1 la figura di diffrazione prodotta da un fascio di luce parallela proveniente da una fenditura F, illuminata da una lampada al sodio, posta orizzontalmente nel piano focale della lente C. Questo fascio di luce parallela incide normalmente sulle pareti di vetro a facce piane e parallele di una vaschetta che contiene il liquido in esame, sede di onde ultrasonore stazionarie, ottenute con un quarzo piezoelettrico eccitato da un circuito oscillante tipo Hartley sulla frequenza $\nu = 1{,}740$ MHz. Sul percorso del fascio luminoso emergente dalla vaschetta veniva posta una fenditura F_1, parallela ad F, il cui spessore d verticale, regolabile con una vite micrometrica, era uguale alla lunghezza λ dell'onda ultrasonora nel liquido in esame.

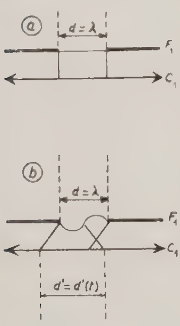


Fig. 2. - *a*) e *b*).

Con questo dispositivo, alla creazione delle onde ultrasonore, si osservava un allargamento della immagine della fenditura F in S. Ciò dipende dal fatto che senza ultrasuoni il fronte dell'onda luminosa è piano, mentre sotto l'azione degli ultrasuoni il fronte s'incurva. La sua sezione, con il piano determinato dalla direzione di propagazione degli ultrasuoni e dall'asse ottico principale del sistema, è teoricamente una sinusoide di periodo uguale a quello degli ultrasuoni. Perciò, quando nel liquido si hanno onde ultrasonore, il flusso luminoso che incide sulla lente C_1, invece di essere distribuito (fig. 2*a*) sulla lun-

[2] R. LUCAS e P. BIQUARD: *Journ. de Phys.*, 7, 474 (1932).

ghezza $d = \lambda$, come quando mancano gli ultrasuoni, è distribuito su di una lunghezza $d' = d'(t)$ (fig. 2b) che naturalmente è funzione del tempo. Di conseguenza nel piano focale S della lente C_1, l'immagine della fenditura F non rimane delle stesse dimensioni. Infatti, è noto che il passaggio degli ultrasuoni modula un fascio di luce parallela incurvandone la traiettoria. L'angolo ϑ (fig. 3), formato dalla direzione iniziale della luce, parallela all'asse ottico principale, con la nuova direzione in un certo istante, è dato (³) dalla formula:

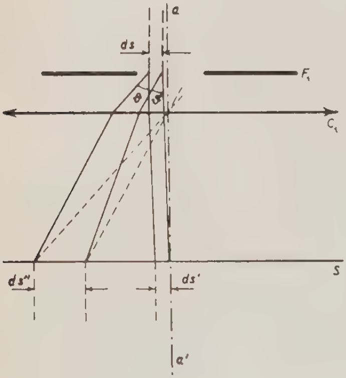


Fig. 3.

$$(1) \qquad \vartheta = \frac{\pi(n_0^2-1)(n_0^2+2)l}{3n_0^2\varrho V^2\lambda}\,\Delta p = k\frac{l}{\lambda}\Delta p\,,$$

dove n_0 è l'indice di rifrazione della sostanza, ϱ la sua densità, l lo spessore di liquido attraversato dalla luce e dagli ultrasuoni, V la velocità e λ la lunghezza d'onda degli ultrasuoni, e Δp è la variazione di pressione generata dal passaggio delle vibrazioni elastiche, a sua volta variabile col tempo nel caso di onde stazionarie secondo la seguente funzione sinusoidale:

$$\Delta p = 2\Delta p_0 \cos 2\pi\left(\frac{D-x}{\lambda}\right)\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right),$$

essendo T il periodo degli ultrasuoni e D la distanza fra la superficie emittente del quarzo e la lamina riflettente.

In un certo istante, e quindi per un certo valore di Δp, a cui è dovuta la variazione Δn di indice di rifrazione che produce l'incurvamento dei raggi luminosi, tutto accade come se le traiettorie luminose dei raggi uscenti dall'elemento ds della fenditura F_1, anzichè proseguire parallelamente all'asse ottico principale aa' (fig. 3) come quando gli ultrasuoni non sono in azione, deviassero da questa direzione di un angolo ϑ dato proprio dalla (1). Ma questo angolo ϑ, in un certo istante, varia al variare dell'ascissa x lungo la fenditura. Quindi nel piano focale dove si raccoglie l'immagine di F, questa, per il passaggio degli ultrasuoni, varierà di dimensioni. Se diciamo ds' l'elemento immagine di ds senza ultrasuoni, e ds'' quello che si ha con gli ultrasuoni, evidentemente l'intensità luminosa varia corrispondentemente da un valore I' ad un valore I'' tali che:

$$(2) \qquad d\Phi = I'\,ds' = I''\,ds''\,,$$

essendo dΦ il flusso elementare emergente dalla superficie ds.

(³) L. Bergmann: *Der Ultraschall* (1949), pag. 210.

Più particolarmente, all'istante iniziale $t = 0$ (in generale negli istanti $t = 2nT/4$ essendo n un numero intero), l'angolo ϑ è nullo per tutti i raggi luminosi, e quindi $ds'' = ds'$, cioè le dimensioni delle immagini elementari sono le stesse di quelle che si hanno senza ultrasuoni.

Negli istanti $t = (2n + 1)T/4$ l'angolo ϑ assume il massimo valore assoluto

$$|\vartheta_0| = k\frac{l}{\lambda}2\,|\Delta p_0|\,,$$

a cui corrisponde il massimo valore assoluto di ds'', cioè i raggi luminosi convergono o divergono al massimo, rispetto alla direzione dell'asse ottico principale.

Quindi, variando ds'' ed essendo costante il flusso che l'attraversa, al variare del tempo varia anche l'intensità I'', che per la (2) è inversamente proporzionale alla superficie, a parità di flusso, e quindi la quantità di luce che arriva in ogni punto nel piano focale.

Estendendo queste considerazioni ad una trattazione integrale, relativa a tutta la fenditura, tenendo conto della simmetria delle aperture angolari dei raggi luminosi, rispetto all'asse ottico principale, ed inoltre del fatto che l'intensità d'illuminamento dei raggi più inclinati è minore di quella relativa ad angoli più piccoli per la nota legge del coseno di Lambert, è facile prevedere che l'andamento dell'intensità deve essere simmetrico rispetto all'asse ottico principale, e presentare un massimo proprio in questa direzione, tendendo poi a zero lateralmente con continuità.

È fondamentale osservare che l'allargamento dell'immagine diffratta e l'andamento dell'intensità dipende da Δp_0, dallo spessore d e dalla lunghezza del percorso luminoso (l) degli ultrasuoni. Quindi, a parità di questi parametri, l'andamento dell'intensità luminosa dovrebbe essere la stessa per tutte le sostanze. La messa in evidenza di una diversità, tenendo debito conto dell'errore sperimentale, dimostrerebbe una diversità nella forma dell'onda ultrasonora che si propaga nel mezzo considerato, la cui causa specifica va ricercata nella natura del liquido stesso.

Nelle nostre ricerche sperimentali abbiamo riferito il comportamento di vari liquidi a quello del benzolo, preso come liquido di riferimento. Si procedeva innanzitutto alla determinazione della lunghezza d'onda λ relativa ai vari liquidi col metodo ben noto della misura della distanza fra le righe diffratte, ottenute nel piano focale S del dispositivo sperimentale illustrato in fig. 1 senza fenditura F_1.

La tabella I dà i valori ottenuti per le varie sostanze esaminate. (Si noti come per il benzolo e la soluzione di gomma para in C_6H_6 λ quasi coincida).

TABELLA I.

	λ (mm)
Benzolo	$0{,}672 \pm 1 \cdot 10^{-2}$
Acqua distillata	$0{,}833 \pm 1{,}5 \cdot 10^{-2}$
Etilpoliglicolo	$0{,}774 \pm 2 \cdot 10^{-2}$
Soluzione in C_6H_6 di gomma para .	$0{,}670 \pm 1 \cdot 10^{-2}$

Si regolavano allora le dimensioni della fenditura F_1 in modo che fossero uguali proprio a λ e si fotografava l'immagine della fenditura senza ultrasuoni e poi quella ottenuta in presenza di ultrasuoni. Le lastre venivano poi microfotometrate con un microfotometro Moll, che dava l'andamento dell'annerimento, e da questo si passava alle curve d'intensità, secondo il noto metodo

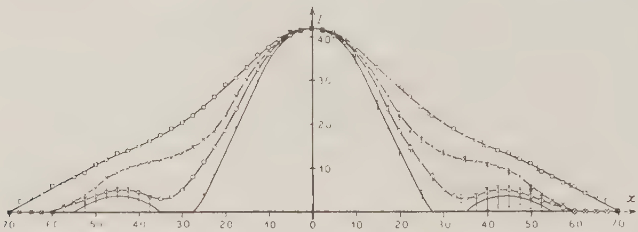


Fig. 4. - C_6H_6.

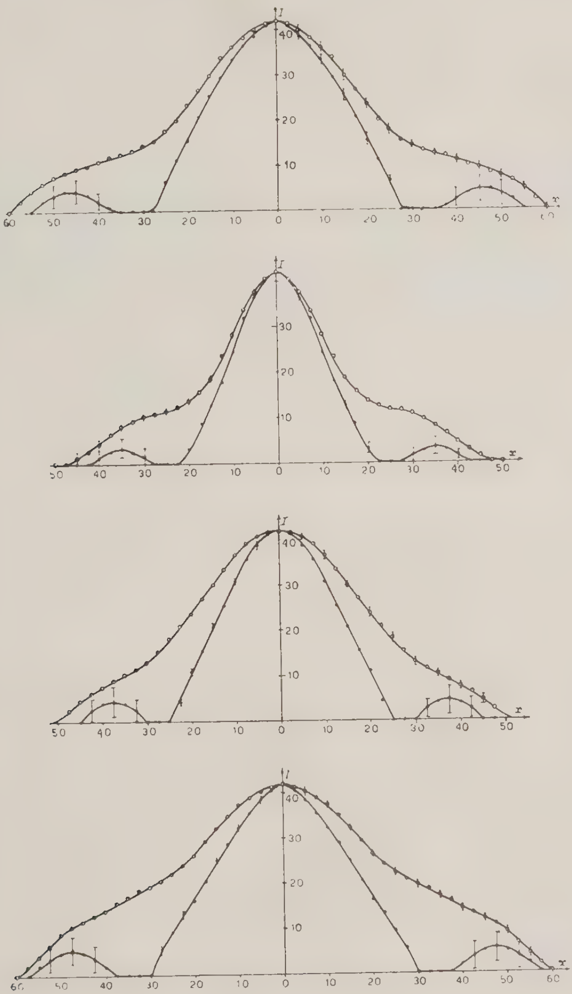
• $I(x)$ senza u. s.
⊙ » con righe del 3° ordine.
X » » » » 5° »
⊡ » » » » 7° »

delle marche d'intensità, che si aveva cura di ottenere sulle stesse lastre da microfotometrare.

Del lavoro sperimentale fatto presentiamo direttamente le curve d'intensità. Dopo esserci assicurati, con lavoro preliminare, che la fenditura F_1 risultasse perfettamente sull'asse ottico principale in modo da ovviare ad eventuali aberrazioni particolarmente sensibili date le dimensioni del sistema sperimentale, si è proceduto alla determinazione delle curve di intensità della luce diffratta nel benzolo per varie potenze ultrasonore corrispondenti rispettivamente proprio all'inizio della comparsa in S delle righe diffratte del 3° ordine, del 5° ordine e del 7° ordine (fig. 4).

Per quella potenza che permetteva di osservare l'inizio della comparsa in S delle righe diffratte del 5° ordine, usando sempre la stessa vaschetta, si ottenevano relativamente ai liquidi suddetti le curve d'intensità dell'immagine

della fenditura con ultrasuoni; in fig. 5 sono riportati tali risultati insieme a quelli della fenditura senza ultrasuoni.



a) C_6H_6.

b) H_2O.

c) Etilpoliglicolo.

d) soluzione di gomma para in C_6H_6.

Fig. 5.

Ma il confronto fra i vari liquidi può farsi effettivamente dalle figg. 6 e 7. Le curve riportate danno la differenza $\Delta I = I'' - I'$ in scala arbitraria, tra l'intensità I'' della fenditura con ultrasuoni e l'intensità I' della fenditura senza ultrasuoni lungo uno dei rami delle curve di figg. 4 e 5, in funzione

delle ascisse. In fig. 6, più particolarmente, si hanno i dati relativi al benzolo per potenze che permettono la comparsa delle righe del 3°, 5° e 7° ordine. In fig. 7 si hanno i dati relativi all'acqua, all'etilpoliglicolo e alla soluzione di gomma para in benzolo per la potenza che permette di osservare le righe del 5° ordine. I punti sperimentali riportati rappresentano il valore medio delle misure effettuate e sono affetti da un errore chiaramente indicato in figura.

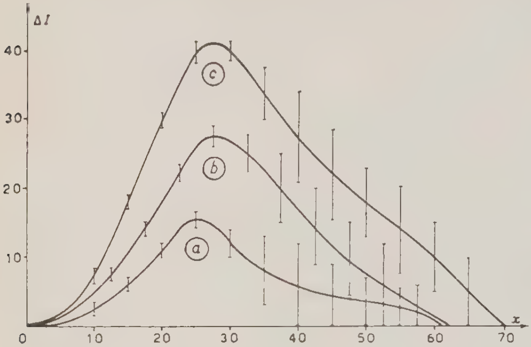


Fig. 7.
a) fino al 3° ordine;
b) » al 5° »
c) » al 7° »

Da queste curve è evidente come l'acqua ed il benzolo, tenendo conto degli errori di misura, praticamente si comportano nello stesso modo; mentre l'etilpoliglicolo e la soluzione di gomma para in benzolo presentano una notevole diversità soprattutto lungo i tratti di curva dove è più piccolo l'errore. Si nota chiaramente che l'andamento di queste due ultime sostanze, grosso modo, si avvicina di più a quella c) del benzolo ottenuta nelle condizioni di presenza delle righe diffratte del 7° ordine.

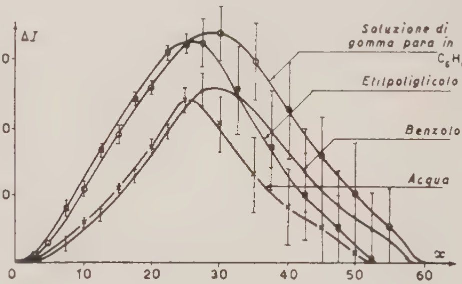


Fig. 7.

La diversità fra l'andamento della intensità per l'etilpoliglicolo, per la soluzione di gomma para in benzolo e quella di riferimento b) del benzolo ottenuta nelle stesse condizioni si presenta piuttosto notevole. Esclusa una influenza dipendente da errori di misura, la causa di questa anomalia va cercata senza dubbio in un'azione specifica del liquido, che deve alterare la conformazione teorica sinusoidale dell'onda ultrasonora e quindi deviare diversamente i raggi luminosi.

Le ricerche continuano e notizie ulteriori saranno date sui risultati forniti dall'esame di altre sostanze.

Si ringrazia vivamente il prof. CARRELLI per la costante guida ed i mezzi messi a disposizione.

SUMMARY (*)

Scope of the present paper is discussion of the passage through liquids subjected to hypersonic irradiation of a monochromatic light beam, which thickness is of the same order of magnitude of the hypersonic wave-length. In these conditions the diffraction fringes due to the hypersonic phase grating disappear and in their place appears an enlarged image of the slit. The change of the intensity along this figure, certain conditions of the experience being equal, should depend only on the form of the hypersonic wave. A remarkable difference is found to exist between the examined liquids.

(*) *Editor's translation.*

IL NUOVO CIMENTO Vol. IX, N. 3 1 Marzo 1952

Sul meccanismo delle scintillazioni nelle soluzioni.

M. Ageno e R. Querzoli

Laboratorio di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità - Roma

(ricevuto il 15 Gennaio 1952)

Riassunto. — Immergendo in una soluzione di terfenile in xilolo al 5‰ una sorgentina di particelle alfa, si è realizzata una sorgente di luce di fluorescenza sufficientemente intensa per poter essere fotografata. Eseguendo una serie di fotografie di tale sorgente in condizioni sperimentali diverse, si è ottenuta per la prima volta una dimostrazione sperimentale diretta: *a*) del trasporto spaziale dell'energia su distanze dell'ordine di alcuni millimetri, in una soluzione scintillante, eccitata da radiazioni di alta energia; *b*) del trasferimento dell'energia di eccitazione dal solvente al soluto. Si è dimostrato inoltre che tale trasporto di energia avviene, almeno in parte, via radiazione.

1. - Sin dai primi lavori sulle scintillazioni nei liquidi e nelle soluzioni ([1-3]), si osservò che sciogliendo in taluni solventi piccole quantità di una sostanza opportunamente scelta si ottiene una emissione di luce, nel campo spettrale di sensibilità del fotomoltiplicatore, assai maggiore della somma della luce emessa in tale campo separatamente dal solvente e dal soluto, sotto lo stesso irraggiamento.

Questa non additività dei poteri fluorescenti ha suggerito l'idea che l'energia ceduta dalla radiazione eccitatrice alle molecole del solvente (e da queste in assenza di soluto dissipata altrimenti che sotto forma di luce di fluorescenza) venga in parte trasferita alle molecole del soluto e da queste in parte riemessa nel campo spettrale del fotomoltiplicatore. Kallmann e Furst hanno anche

(1) M. Ageno, M. Chiozzotto e R. Querzoli: *Rend. Acc. Lincei*, **6**, 626 (1499).
(2) M. Ageno, M. Chiozzotto e R. Querzoli: *Phys. Rev.*, **79**, 720 (1950)
(3) G. T. Reynolds, F. B. Harrison e G. Salvini: *Phys. Rev.*, **78**, 488 (1950).

fatto alcune ipotesi sul meccanismo di tale trasporto di energia dal solvente al soluto (4-5).

Vi sono, com'è noto, alcuni resultati sperimentali che si accordano con questa tesi. Innanzi tutto, le soluzioni efficienti dal punto di vista delle scintillazioni sembrano essere quelle il cui solvente ha una banda di fluorescenza di lunghezza d'onda minore di quella del soluto (5). In secondo luogo, la composizione spettrale della luce emessa dalla soluzione sembra essere quella caratteristica del soluto e non del solvente (5).

È tuttavia chiaro che tutti questi resultati possono spiegarsi anche altrimenti che ammettendo un trasferimento di energia dal solvente al soluto e che una dimostrazione conclusiva dell'esistenza di un tale fenomeno può basarsi soltanto su una indagine più approfondita del meccanismo delle scintillazioni nelle soluzioni.

2. – Sviluppando un'idea esposta da M. KASHA in un seminario tenuto nella scorsa estate presso l'Istituto di Fisica dell'Università di Roma, ci siamo proposti di studiare più da vicino tale meccanismo, cercando innanzi tutto di vedere se in seno ad una soluzione scintillante eccitata da una radiazione di elevata energia, l'energia di eccitazione non viaggi per una distanza apprezzabile, prima di trasformarsi in radiazione di fluorescenza. Questo problema ci è stato posto dall'ipotesi avanzata da KASHA che il solvente eccitato dalla radiazione incidente emetta una radiazione ultravioletta, la quale riassorbita dal soluto ecciti in questo la fluorescenza normale.

Allo scopo di mettere in evidenza un tale eventuale trasporto spaziale dell'energia in seno alla soluzione, abbiamo pensato di localizzare l'eccitazione ad una zona assai ristretta e il meglio delimitata possibile del liquido in esame. Escluso quindi l'impiego di raggi γ e β, abbiamo deciso di adoperare come radiazione eccitatrice le particelle α del Polonio, bombardando con esse una ristretta zona della soluzione. Siccome il percorso di tali particelle è di circa 5 mg/cm^2, la loro penetrazione è dell'ordine dei 50 μ. Di conseguenza, se non si ha un trasporto spaziale dell'energia su di una distanza apprezzabile, la luce di fluorescenza deve essere emessa soltanto da uno straterello di liquido, dello spessore di quest'ordine di grandezza. Tanto più diffusa risulterà invece la sorgente di luce di fluorescenza quanto maggiore è la distanza media su cui si effettua il trasporto.

Il problema è così ridotto a quello di determinare l'estensione spaziale della sorgente di luce di fluorescenza, il che si può fare agevolmente producendo un'immagine ottica di tale sorgente su di una pellicola fotografica.

L'esperienza è stata eseguita usando come sorgente di particelle α un di-

(4) H. KALLMANN e M. FURST: *Phys. Rev.*, 79, 857 (1950).
(5) H. KALLMANN e M. FURST: *Phys. Rev.*, 81, 853 (1951).

schetto di nichel del diametro di circa 5 mm con sopra depositati circa 10 mC di Polonio e come soluzione scintillante una soluzione di para-terfenile in xilolo al 5 ‰ [3]. La sorgente di luce di fluorescenza in tal modo ottenuta è resultata sufficientemente intensa per poter essere facilmente fotografata. Le fotografie sono state prese a distanza variabile tra 25 e 40 cm con macchina Leica dotata di obbiettivo Elmar 1 : 3,5 o Summarit 1 : 1,5, e posa variabile tra qualche minuto e una cinquantina di ore.

Una parte dei resultati ottenuti è già stata pubblicata in due brevi note preliminari [6-7].

3. – Il dispositivo sperimentale adottato è schematicamente rappresentato nella fig. 1. Una vaschetta di vetro di forma cilindrica ad asse orizzontale,

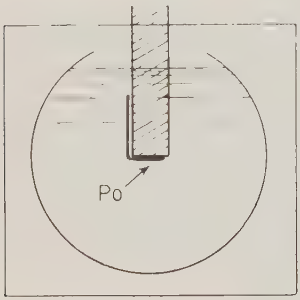


Fig. 1.

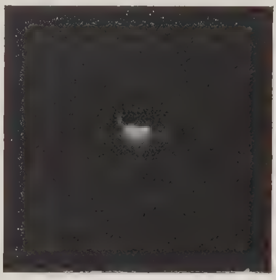


Fig. 2. – Terfenile in xilolo al 5‰.

chiusa alle due estremità da faccie piane conteneva 75 cm³ della soluzione scintillante, in cui era immersa la sorgente di particelle α, sostenuta da un tondino di ottone. Abbiamo preferito immergere la sorgente nel liquido, anzichè bombardare con le α una zona della superficie libera di questo, per evitare effetti di rifrazione e riflessione al limite liquido-aria. Le fotografie sono state prese attraverso la faccia piana anteriore della vaschetta, con la sorgente disposta in modo tale da vedere di taglio il dischetto di nichel. In tal modo, in assenza di trasporto si sarebbe dovuto vedere sul negativo una lineetta luminosa ben netta, come sorgente di luce di fluorescenza.

La fig. 2 dimostra il resultato ottenuto con questo dispositivo sperimentale Come si vede, la sorgente di luce non è affatto localizzata alla zona di liquido attraversata dalle particelle α ma si estende tutto attorno alla sorgente, per una distanza dell'ordine di vari millimetri.

(6) M. Ageno e R. Querzoli: *Rend. Acc. Lincei*, **11**, 265 (1951).
(7) M. Ageno e R. Querzoli: *Rend. Acc. Lincei* (in corso di stampa).

Si può, a priori, dare di questo fatto varie interpretazioni:

1) Si può supporre che l'alone luminoso che circonda la sorgente sia dovuto a diffusione da parte del liquido della luce di fluorescenza emessa solo nelle immediate vicinanze della sorgente stessa;

2) oppure ch'esso sia dovuto a lenta diffusione nella soluzione di parte del Polonio depositato inizialmente sul nichel;

3) oppure, infine, che l'energia ceduta al liquido dalle particelle α nelle immediate vicinanze della sorgente viaggi attraverso il liquido stesso per un tratto dell'ordine di alcuni millimetri, prima di trasformarsi in radiazione di fluorescenza.

Per escludere la prima possibilità, abbiamo sostituito alla sorgente di particelle α una provetta di vetro col fondo molto sottile, sul quale era adagiato un

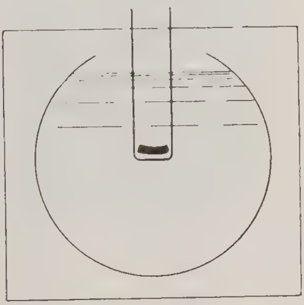


Fig. 3.

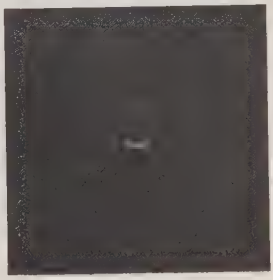


Fig. 4. – Schermo fosforescente e terfenile in xilolo al 5 ‰.

pezzetto di schermo fosforescente (fig. 3). La fotografia eseguita in queste condizioni, fig. 4, mostra l'immagine ben netta dello schermo fosforescente, la cui luce non viene apprezzabilmente diffusa dalla soluzione. La striscia debolmente luminosa superiore, è dovuta ad un effetto di rifrazione, nel punto in cui il liquido esterno cessa di bagnare la provetta di vetro in esso immersa. Sul negativo è visibile molto debolmente il fondo semicircolare della vaschetta, illuminato dalla luce che proviene dallo schermetto che ha attraversato la soluzione.

Per escludere la possibilità che il resultato della fig. 2 sia dovuto a lento passaggio in soluzione del Polonio, abbiamo fatto due prove. Innanzi tutto, abbiamo misurato la radioattività della soluzione dopo l'esecuzione della prima fotografia. A questo scopo, alcune goccie della soluzione sono state evaporate su una lastrina di alluminio e con un contatore proporzionale di modello convenzionale si è contato il numero di particelle α da questa emesse al secondo. Si è trovato una radioattività α ben misurabile (circa una α al secondo) corrispondente però a meno di un quarto di microcurie per tutta la soluzione. Il

Polonio passato in soluzione è resultato quindi meno di 1/400 di quello depositato inizialmente sul nichel, il che esclude che l'effetto dimostrato dalla fig. 2 sia dovuto a questa causa.

Come seconda prova, abbiamo interposto tra la sorgente di particelle α e la soluzione una lamina di alluminio dello spessore di 0,01 mm, corrispondente a circa metà percorso delle α del Polonio. In questo caso la sorgente non veniva a diretto contatto con il liquido ed era quindi esclusa la possibilità di un passaggio parziale del Polonio in soluzione. La fig. 5 mostra il resultato della fotografia eseguita in queste condizioni. Come si vede l'alone luminoso (pur ridotto a causa del molto minor percorso delle α nel liquido) persiste chia-

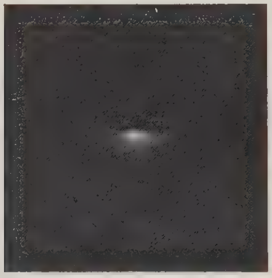


Fig. 5. – Sorgente protetta con lamina di Al. Terfenile in xilolo al 5 ‰.

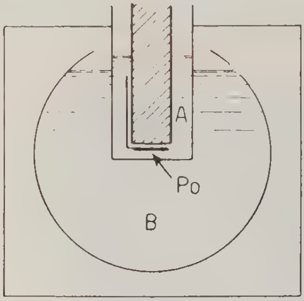


Fig. 6.

ramente a immediato contatto con l'alluminio, il che esclude ogni possibilità per la seconda delle tre eventualità sopra elencate.

Sembra dunque che si possa concludere che la fotografia della fig. 2 dà *la prima dimostrazione diretta dell'esistenza di un trasporto spaziale dell'energia su una distanza dell'ordine dei millimetri, in una soluzione scintillante eccitata con radiazioni di alta energia.*

4. – Come secondo problema, ci siamo proposti di mettere in evidenza un eventuale trasferimento dell'energia di eccitazione dal solvente al soluto, quale è suggerito dagli argomenti esposti nel n. 1.

A questo scopo, abbiamo adottato un dispositivo sperimentale che permette di separare il liquido in cui si esaurisce il percorso delle particelle α, da quello in cui si desta la fluorescenza. Esso è schematicamente rappresentato nella fig. 6. Nella vaschetta B, la stessa della fig. 1, contenente come al solito la soluzione fluorescente, è stata immersa una provetta cilindrica a generatrici verticali A, contenente il liquido in esame nel quale veniva immersa la sorgente di particelle α. Naturalmente questo dispositivo può rispondere allo

scopo prefissoci, solo se il meccanismo del trasporto dell'energia attraverso la soluzione è tale da non trovare un ostacolo insormontabile nel vetro che costituisce il fondo della provetta *A*. Per chiarire questo punto e scegliere eventualmente un vetro di composizione opportuna, abbiamo fatto delle prove preliminari col dispositivo della fig. 1, ponendo nella soluzione scintillante, un paio di millimetri al di sotto della sorgente, una lastrina del vetro in esame. La fig. 7 mostra il resultato ottenuto con una determinata qualità di vetrini coprioggetti, dello spessore di 0,18 mm, che è stata definitivamente scelta a costituire il fondo della provetta *A*.

Dei resultati ottenuti col dispositivo della fig. 6 ci limiteremo nel seguito

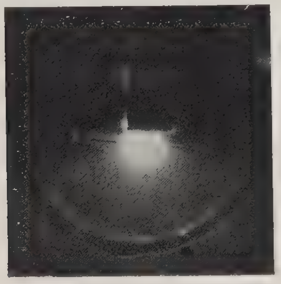


Fig. 7. – Passaggio della radiazione intermedia attraverso un vetrino.

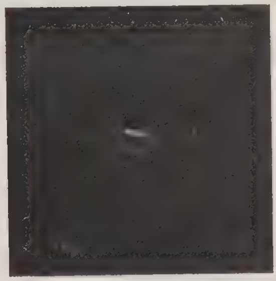


Fig. 8. – *A*: xilolo puro - *B*: terfenile in xilolo al 5‰.

di questo lavoro a discutere quelli basati sulla osservazione qualitativa di alcune fotografie ottenute variando opportunamente sia il liquido superiore sia il liquido inferiore. Rimandiamo invece ad un altro lavoro tanto l'esame qualitativo delle restanti fotografie, quanto tutte le deduzioni di carattere quantitativo, anche perchè le lunghe immersioni in liquidi diversi e i ripetuti lavaggi hanno fatto sì che il numero delle α emesse e il percorso di ogni particella resultino notevolmente ridotti, in modo tale da non permetterci di stabilire con una certa esattezza l'energia totale ceduta di volta in volta dalla sorgente al liquido in cui essa era immersa.

5. – Per poter dare una risposta al problema enunciato all'inizio del n. 4. abbiamo posto, nella provetta *A* il solo solvente (xilolo puro) e nella vaschetta *B* la solita soluzione di terfenile in xilolo al 5‰. Il resultato ottenuto è mostrato nella fig. 8. Come si vede, lo xilolo puro fluoresce con una certa intensità solo nelle immediate vicinanze della sorgente e la fluorescenza riprende nella soluzione inferiore, al di sotto del vetrino di fondo della provetta *A*, eccitata (presumibilmente) da una radiazione che attraversa lo xilolo senza essere sensibilmente assorbita.

Tale resultato è suscettibile a priori di due interpretazioni:

1) Si può supporre che la zona oscura intermedia che separa le due zone di fluorescenza sia sostanzialmente dovuta al fatto che lo xilolo fluoresce assai meno della soluzione di terfenile in xilolo e che entrambe le fluorescenze siano eccitate da una stessa radiazione proveniente dalla sorgente: per esempio i raggi γ del Polonio o raggi β emessi da un residuo di Radio D mescolato al Polonio.

2) Oppure che le molecole dello xilolo, eccitate per azione diretta delle particelle α, emettano una radiazione che non viene apprezzabilmente riassor-

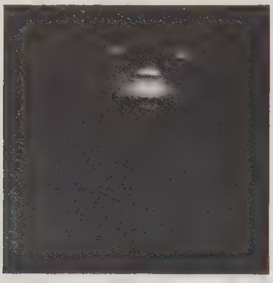


Fig. 9. – Riflessione della radiazione intermedia.

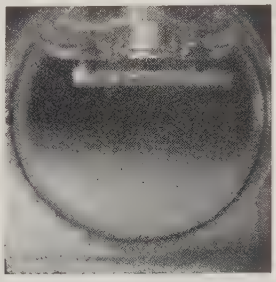


Fig. 10. – Dispositivo sperimentale della fig. 9.

bita nello xilolo, mentre è energicamente assorbita dal terfenile, in cui eccita la fluorescenza normale.

Per ciò che riguarda la prima interpretazione, sembra che si possa senz'altro escludere che un effetto del genere di quello mostrato nella fig. 8 sia dovuto ai raggi γ del Polonio. I coefficienti di assorbimento di tali raggi γ nelle due soluzioni sono infatti pressochè uguali e assai più piccoli di quanto è mostrato nell'andamento spaziale della fluorescenza. Per analoghe ragioni sembra che si possa pure escludere che la fluorescenza in esame sia dovuta a raggi β del Radio D.

Per chiarire in modo definitivo questo punto, ci siamo proposti di determinare il comportamento della radiazione che eccita la fluorescenza nella soluzione di terfenile in xilolo nell'attraversare una sottile lamina di alluminio. Nel caso che questa radiazione sia costituita da raggi γ del Polonio o da raggi β del Radio D, un foglio di alluminio dello spessore di 0,01 mm deve rappresentare per essa un ostacolo trascurabile in confronto al vetrino copri-oggetti che costituisce il fondo della provetta *A*. Se tale radiazione è invece costituita da raggi X molto molli, essa deve essere sostanzialmente assorbita da un sottile foglio di alluminio, mentre se si tratta di radiazione ultravioletta, ciò che si deve osservare è sostanzialmente la riflessione alla superficie di un foglio di alluminio.

La fig. 9 mostra ciò che si ottiene ponendo anche nella provetta *A* la soluzione di terfenile in xilolo e disponendo al di sotto del vetrino coprioggetto una lamina di alluminio dello spessore di 0,01 mm. Per agevolare l'interpretazione di questa fotografia, la fig. 10 mostra allo stesso ingrandimento il dispositivo sperimentale. Come si vede, la radiazione che desta la fluorescenza del terfenile viene sostanzialmente riflessa dall'alluminio. La lineetta luminosa inferiore della fig. 9 è dovuta (come mostra la sovrapposizione delle figg. 9 e 10) ad un pochino di soluzione fluorescente infiltratasi tra il vetrino coprioggetto e la lamina di alluminio, mentre al di sotto di quest'ultima non si nota alcuna fluorescenza.

Sembra dunque che si possa concludere che la fig. 8 offre *la prima dimostrazione sperimentale diretta del trasferimento dell'energia dal solvente al soluto in una soluzione scintillante, eccitata con radiazioni di alta energia.*

6. – I resultati precedentemente discussi offrono anche la possibilità di giungere a delle conclusioni definite, relativamente al meccanismo del trasporto dell'energia attraverso la soluzione. Il fatto che tale meccanismo sia tale da non trovare un ostacolo insormontabile nel vetrino coprioggetto che costituisce il fondo della provetta *A*, esclude senz'altro che si tratti di un processo di cessione di energia per risonanza o per urto. Esclude inoltre che si tratti di un trasporto di energia tramite una radiazione corpuscolare.

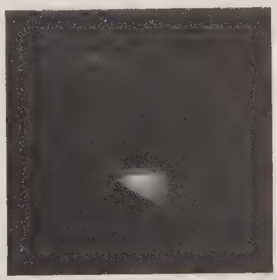


Fig. 11. – Riflessione della radiazione intermedia su lamina di Al.

Si tratta dunque di *un trasporto di energia via radiazione.* La penetrazione relativamente elevata di tale radiazione intermedia, che attraversa agevolmente 0,18 mm di vetro, esclude inoltre che si tratti di ultravioletto lontano o di raggi X molto molli.

La fig. 9 dimostra come abbiamo detto che la radiazione intermedia viene riflessa dall'alluminio. Ciò è dimostrato in modo anche più appariscente nella fig. 11, ottenuta col dispositivo sperimentale della fig. 1, disponendo al di sotto della sorgente di particelle α una lamina di alluminio dello spessore di 0,1 mm disposta a 45°. Si deve dunque trattare di ultravioletto vicino. Un limite inferiore per la lunghezza d'onda può allora stabilirsi agevolmente, facendo uno spettro di assorbimento nell'ultravioletto del vetro che costituisce il fondo della provetta *A* e vedendo qual'è il taglio di tale vetro dal lato delle brevi lunghezze d'onda.

La fig. 12 rappresenta tale spettro di assorbimento e fa vedere che il taglio in questione è attorno ai 3 000 Å.

Sembra dunque di poter concludere che le molecole dello xilolo eccitate

per azione diretta delle particelle α del Polonio emettono una radiazione ultravioletta che è, almeno per la maggior parte, di lunghezza d'onda maggiore di 3 000 Å. Tale radiazione viene energicamente assorbita dal terfenile presente nella soluzione ed eccita nelle molecole di questo la fluorescenza normale, nel campo spettrale di sensibilità degli ordinari fotomoltiplicatori.

Non è naturalmente escluso che in questa, come pure in altre soluzioni da

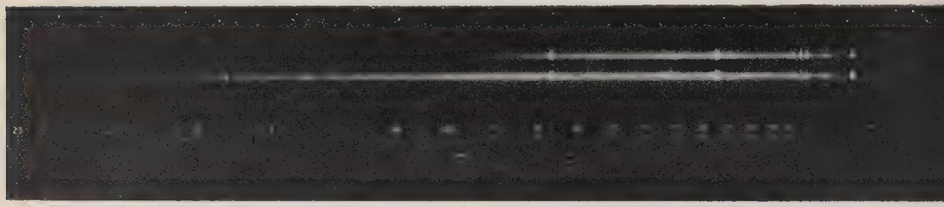


Fig. 12. – Spettro di assorbimento del vetro di fondo della provetta *A*.

noi studiate e che danno resultati analoghi a quelli su esposti, possa aversi un trasferimento dell'energia dal solvente al soluto anche con un meccanismo diverso da quello qui considerato e in particolare coi meccanismi proposti da Kallmann. Sui resultati ottenibili su tale argomento con la nostra tecnica si riferirà in seguito.

Desideriamo, in conclusione, ringraziare pubblicamente M. Kasha, il cui seminario è stato il punto di partenza della nostra ricerca; il prof. E. Amaldi, direttore del Centro per la Fisica Nucleare del C.N.R., per averci gentilmente fornita la sorgente di particelle α con cui la ricerca è stata eseguita; il prof. G. Milazzo del nostro Istituto, che ha eseguito per noi alcuni spettri di assorbimento dei vetri usati per le nostre vaschette.

SUMMARY

A source of fluorescent radiation, intensive enough to be photographed, has been made by immersing into a 5 ‰ solution of terphenyl in xylene a source of alpha-particles. From a set of photographs of such a source in different experimental conditions, a direct experimental proof has been carried out for the first time: *a*) of the energy transport through a range of some millimeters, into a scintillating solution excited by high energy radiations; *b*) of the excitation energy transfer from solvent to solute. It has also been demonstrated that this energy transfer is effected, at least partially by radiation.

IL NUOVO CIMENTO Vol. IX, N. 3 1 Marzo 1952

Coulomb Interaction and the Meissner-Ochsenfeld effect.

M. R. Schafroth
Swiss Federal Institute of Technology - Zürich

(ricevuto il 26 Gennaio 1952)

Summary. — By application of previously (1) developed methods it is shown that the Coulomb force in a gas of free charged particles does not produce a Meissner-Ochsenfeld effect as long as the perturbation series with respect to the Coulomb interaction converges.

1. – Introduction.

In a previous paper (1) we have derived a general criterion for the occurrence of the Meissner-Ochsenfeld effect in a given model. It is the following: Consider the model under the influence of a weak magnetic field $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ of arbitrary spatial variation. A perturbation treatment of the magnetic field leads to a linear relationship between the current density $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})$ in the model and the field:

$$i_\mu(\boldsymbol{x}) = \sum_\nu \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}' K_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')A_\nu(\boldsymbol{x}') \,, \tag{1}$$

($\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ being the vector potential of $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ in an arbitrary gauge). Written in Fourier space, this reads:

$$i_\mu(\boldsymbol{q}) = \sum_\nu K_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) \cdot A_\nu(\boldsymbol{q}) \,. \tag{2}$$

Gauge invariance requires

$$\sum_\nu K_{\mu\nu} \cdot q_\nu = \sum_\mu q_\mu \cdot K_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{3}$$

(1) M. R. Schafroth: *Helv. Phys. Acta*, **24**, 645 (1951). (Called I in the following).

which, for an isotropic model, is equivalent to

$$K_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) = (q_\mu q_\nu - q^2 \cdot \delta_{\mu\nu}) \cdot K(q^2) . \tag{4}$$

Expansion of $K(q^2)$ around $q^2 = 0$ gives a classification of the different types of response of our model to the magnetic field: A regular $K(q^2)$ describes ordinary diamagnetism (and its «smear-out-effects»), a pole of first order at the origin:

$$K(q^2) = -\frac{\lambda/c}{q^2} + K_{\text{reg}}(q^2) , \tag{5}$$

is equivalent to a Meissner-Ochsenfeld-effect; more precisely to the equation

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda}{c} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) + K_{\text{reg}}(\Delta) \cdot \Delta \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) , \tag{6}$$

which is equivalent to the London equation [2]

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\lambda}{c} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) , \tag{6'}$$

apart from a (usually negligible) correction term accounting for the still present normal diamagnetism.

By means of this criterion it can easily be seen [1] that the interaction considered by FRÖHLICH [3] between conduction electrons and lattice vibrations does not yield the Meissner-Ochsenfeld effect if treated by perturbation methods. (This is a direct consequence of the regularity of the matrix element for phonon emission when the phonon momentum tends towards zero). This means that either the Fröhlich interaction is not at all responsible for superconductivity (which seems unlikely in view of its good qualitative success) or that perturbation theory breaks down before superconductivity can occur. This indicates that superconductivity is a truly collective phenomenon.

In order to strengthen this conclusion it seems useful to consider also other interactions in a weak-coupling approximation, especially the Coulomb force which in an ordinary metal is certainly at least as strong as the Fröhlich interaction. A consideration of this type seems imperative also because of the fact that the matrix element of the Coulomb force in momentum space is of the form $1/\boldsymbol{k}^2$, $\boldsymbol{k}$ being the momentum difference. This brings about singular terms in $K(q^2)$ of exactly the form needed for the Meissner-Ochsenfeld effect.

The purpose of this paper is to show that these singular terms compensate

(2) F. and H. LONDON: *Physica*, **2**, 341 (1935).
(3) H. FRÖHLICH: *Phys. Rev.*, **79**, 845 (1950).

exactly in every approximation of perturbation theory. This is first done in n. 2 for the first order, by explicit calculation, then in n. 3 a general proof for the n^{th} order follows. In n. 4 various further generalizations are discussed. Thus we are faced with the same alternative as in the case of the Fröhlich interaction, i.e. either the Coulomb force does not yield the Meissner-Ochsenfeld effect, or the perturbation series no longer converges when the interaction reaches the magnitude required for the effect.

2. – The first approximation.

We consider a gas of N free charged particles obeying Fermi statistics. For simplicity we restrict ourselves to the case of spin zero; the more general case of arbitrary spin does not show any essentially new feature (cf. n. 4). We impose on the wave functions a periodic boundary condition with periodicity volume G and keep the density N/G fixed when we pass to the limit $G \to \infty$.

We use the formalism of second quantization (⁴). Writing for the wave function

$$\left\{\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{x}) &= G^{-1/2} \sum_p a_p \cdot \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right] \\ \psi^*(\boldsymbol{x}) &= G^{-1/2} \sum_p a_p^* \cdot \exp\left[+\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\right], \end{aligned}\right. \tag{7}$$

where a_p, a_p^* are the usual absorption and emission operators:

$$\left\{\begin{aligned} &[a_p^*, a_{p'}]_+ = \delta_{pp'} = \delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,, \\ &a_p^* a_p = n_p (= n(\boldsymbol{p}))\,, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

we get for the Hamiltonian (neglecting quadratic terms in the magnetic field):

$$H = H_0 + H' + H_C\,, \tag{9}$$

where

$$H_0 = \sum_p n_p \cdot \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \qquad \text{(kinetic energy)},$$

$$H' = -\frac{e}{2mc}\sum_{pp'} (\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')\cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') a_p^* a_{p'} \qquad \text{(magnetic energy)},$$

$$H_C = +2\pi e^2 G^{-1} \sum_{pp'p''p'''} \frac{\delta(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}''')}{(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')^2}\, a_p^* a_{p'} a_{p''}^* a_{p'''}\,.$$

(⁴) P. Jordan and E. Wigner: *Zeits. f. Phys.*, **47**, 631 (1928).

We have put

$$(11) \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}) = G^{-1}\int_G \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\exp\left|+\frac{i}{\hbar}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}\right|,$$

so that

$$(11') \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_p \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p})\exp\left|-\frac{i}{\hbar}\,\boldsymbol{p}\boldsymbol{x}\right|.$$

The current density operator is given by

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{j}'(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{x}) = \frac{e}{2m}\,G^{-1}\sum_{pp'}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}')\exp\left|+\frac{i}{\hbar}\,(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}\right|a_p^*a_{p'},$$

$$\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{x}) = -\frac{e^2}{2m}\,G^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\sum_{pp'}\exp\left|+\frac{i}{\hbar}\,(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\boldsymbol{x}\right|a_p^*a_p.$$

If we label the eigenstates of H_0 by s, s', s'', ... and call the corresponding eigenvalues of H_0: E, E', E'', ..., and if we apply the perturbation method developed in I, we get the following expression for the mean current density at temperature T to the first order in the magnetic field and in the Coulomb force:

$$(13) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{ss's''}&[s\,|\,H_C\,|\,s') - \Omega_1(s\,|\,1\,|\,s'\,]\cdot \\ &\cdot\ [(s'\,|\,H'\,|\,s'')(s''\,|\,\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{x})\,|\,s') + (s'\,|\,\boldsymbol{j}_0(\boldsymbol{x}_0)\,|\,s'')(s''\,|\,H'\,|\,s)]\cdot \\ &\cdot\ F_2(E, E', E'') + \\ &+\sum_{ss'}[(s\,|\,H_C\,|\,s') - \Omega_1(s\,|\,1\,|\,s')](s'\,|\,\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{x})\,|\,s)\cdot F_1(E, E'), \end{aligned}$$

where

$$(14) \qquad \begin{cases} F_1(E, E') = \dfrac{F_0(E) - F_0(E')}{(E - E')}, \\[2ex] F_2(E, E', E'') = \dfrac{F_0(E)}{(E - E')(E - E'')} + \text{cycl}. \end{cases}$$

$$(15) \qquad F_0(E) = \exp\left[+\beta(\Omega_0 + \zeta N - E)\right],$$

is the grand canonical ensemble (5).

Ω_0 = thermodynamical potential of the unperturbed system

β = $1/kT$

ζ = chemical potential

(5) W. GIBBS: *Elementare Grundlagen der Statistischen Mechanik* (Translated by E. ZERMELO, Leipzig, 1905), p. 193 ff.

Ω_1, the correction to the thermodynamic potential due to the Coulomb force in first order, is determined by

$$\sum_s [(s \mid H_C \mid s) - \Omega_1(s \mid 1 \mid s)]F_1(E, E) = 0. \tag{16}$$

Exactly as in I, only terms with $s' = s$ can contribute to the second member in (13); as moreover the diagonal elements of $\boldsymbol{j}'$ are independent of s and can be taken out of the sum, it follows by (16) that the second member of (13) vanishes.

Of the remaining terms in (13) each one describes a three-step process leading back to the initial state: $s \to s' \to s'' \to s$. H' and $\boldsymbol{j}_0$ each correspond to an inelastic scattering of one particle; H_C conserves the momentum. Therefore the « momentum defects » arising in H' and in $\boldsymbol{j}_0$ must compensate. For a momentum defect $+\boldsymbol{q}$, H' contains the factor $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})$; for the compensating momentum defect $-\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{j}_0$ contains the factor $\exp(-i/\hbar \cdot \boldsymbol{q}\boldsymbol{x})$, which, moreover, is the only quantity depending upon $\boldsymbol{x}$ in the term considered. We see thus that the momentum defect $\boldsymbol{q}$ plays the rôle of the Fourier variable $\boldsymbol{q}$ in (2). According to our criterion, we have to look for terms containing a factor $q_\mu q_\nu/q^2$. Such a factor can only occur when H_C contains a singularity $1/q^2$, which can obviously only happen for $s' \neq s$. We are thus left with the problem of evaluating

$$\boldsymbol{i}'(\boldsymbol{x}) = \sum_{\substack{ss's'' \\ s' \neq s}} (s \mid H_C \mid s')[(s' \mid H' \mid s'')(s'' \mid \boldsymbol{j}_0 \mid s) + (s' \mid \boldsymbol{j}_0 \mid s'')(s'' \mid H' \mid s)] \cdot F_2(E, E', E'') . \tag{17}$$

If H_C scatters a pair of particles with momenta $\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}/2$, $\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{q}/2$ into $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}/2$, $\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{q}/2$, the expression (17) can be written

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}'(\boldsymbol{x}) = -\frac{32\pi e^4}{m^2 c} \cdot G^{-2} \sum_{(n)} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \sum_{q} \left\{ \frac{1}{\boldsymbol{q}^2} - \frac{1}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2} \right\} \cdot \\ \cdot \left\{ (\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{p}_2 \exp \left| \frac{i}{\hbar} \boldsymbol{q}\boldsymbol{x} \right| + (\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{p}_1 \exp \left| -\frac{i}{\hbar} \boldsymbol{q}\boldsymbol{x} \right| \right\} \cdot \\ \cdot n\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) n\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\left[1 - n\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right]\left[1 - n\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \cdot \\ \cdot \{ F_2(E, E', E''_1) + F_2(E, E', E''_2) \} , \end{aligned} \tag{17'}$$

where

$$E = \sum_p n(\boldsymbol{p})\varepsilon(\boldsymbol{p}) \; ; \qquad \varepsilon(\boldsymbol{p}) \equiv \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \, ,$$

$$E' = E + \delta_1 + \delta_2 \; ; \qquad \delta_1 \equiv \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) - \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) ,$$

$$\begin{aligned} E_1'' &= E + \delta_1 \\ E_2'' &= E + \delta_2 \end{aligned} \qquad \delta_2 \equiv \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) - \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) .$$

It is easily verified that

$$F_2(E, E', E_1'') + F_2(E, E', E_2'') =$$
$$= \exp\left[\beta(\Omega_0 + \zeta N - E)\right) \cdot \frac{\exp\left[-\beta\delta_1\right] - 1}{\delta_1} \cdot \frac{\exp\left[-\beta\delta_2\right] - 1}{\delta_2} \, ,$$

and further

$$\sum_{(n)} n\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) n\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\left[1 - n\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right]\left[1 - n\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \exp\left[\beta(\Omega_0 + \zeta N - E)\right] = \Phi_1\left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right), \; \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \Phi_1\left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right), \; \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \frac{\delta_1}{\exp\left[-\beta\delta_1\right] - 1} \cdot \frac{\delta_2}{\exp\left[-\beta\delta_2\right] - 1} \, ,$$

where

$$\Phi_1(x, y) = \frac{\Phi_0(x) - \Phi_0(y)}{x - y} \, ,$$

and $\Phi_0(x) = [1 + \exp[\beta(\zeta - x)]^{-1}$ is the Fermi distribution. Inserting this into (17′) we get

$$(17'') \qquad \boldsymbol{i}'(\boldsymbol{x}) = -\frac{32\pi e^4}{m^2 c} G^{-2} \sum_q \sum_{p_1} \sum_{p_2} \left(\frac{1}{\boldsymbol{q}^2} - \frac{1}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2}\right) \cdot$$
$$\cdot \left[(\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{p}_2 + (\boldsymbol{p}_2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}_1\right] \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}\right] \cdot$$
$$\cdot \Phi_1\left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right), \; \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \cdot \Phi_1\left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right), \; \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] .$$

The second term in the expression for the Coulomb force, the « exchange term », obviously does not yield the required singularity. Thus, the only contribution to the kernel $K_{\mu\nu}(\boldsymbol{q})$ which might bring upon a Meissner-Ochsenfeld effect is

finally:

$$(18)\qquad K'_{\mu\nu}(\boldsymbol{q}) = -\frac{16\pi e^4}{m^2 c} G^{-2} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \frac{1}{\boldsymbol{q}^2} (p_1{}^\mu p_2{}^\nu + p_1{}^\nu p_2{}^\mu) \cdot$$
$$\cdot \Phi_1 \left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right), \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \cdot \Phi_1 \left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right), \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right].$$

The double sum splits into a product of two sums of the type

$$\sum_{p} p^\mu \Phi_1 \left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right), \varepsilon\left(\boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right].$$

$\Phi_1(x, y)$ being symmetrical against interchange of x and y, the summand is odd in $\boldsymbol{p}$, so that the sum vanishes. Thus, in first order of perturbation theory, the Coulomb force contributes no singular terms to $K(q^2)$.

3. – The n^{th} approximation.

The n^{th}-order expression for the mean current density consists of a large number of terms of the type

$$(19)\qquad \text{const} \sum_{s_0 s_1 \ldots s_r} (s_0 | H_C | s_1) \ldots (s_{\nu-1} | H_C | s_\nu)(s_\nu | H' | s_{\nu+1})(s_{\nu+1} | H_C | s_{\nu+2}) \ldots$$
$$\ldots (s_{r-1} | H_C | s_r)(s_r | \boldsymbol{j}_0 | s_0) \cdot F_\lambda(E_0, E_1, \ldots, E_r),$$

with $r \leqq \lambda \leqq n$. (If $r < \lambda$, some of the energy values E_i appear more than once in F_λ. The constant term before the sum contains then some factors Ω_k, i.e. corrections to the thermodynamic potential).

This is obvious if we imagine the expansion (I 18) written down and notice that the terms containing $\boldsymbol{j}'$ vanish identically for exactly the same reason as in the first order approximation (cf. n. 2).

(19) can be discussed as (13) in n. 2: it follows that we have only to consider terms with a momentum defect $\boldsymbol{q}$. Moreover, a singularity for $\boldsymbol{q} = 0$ can only arise if the elastic scattering of the two electrons ($\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{q}/2$, $\boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{q}/2 \to$ $\to \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{q}/2$, $\boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{q}/2$) is done by one single factor H_C (which we shall call henceforth H_C^s), and not in several steps. The remaining factors H_C do not affect $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ (except for some extra terms which vanish in the limit $G \to \infty$), and one can easily convince oneself that this fact allows us to shift the absorption and emission operators involved in H_C to the right, regardless of their commutators with the operators contained in the other factors H_C.

(19) becomes then:

$$\text{const} \cdot \sum_{q} \sum_{(n)} \sum_{p_1 p_2} \sum_{p_3 \cdots p_{2r-4}} \varphi(\boldsymbol{p}_3 \cdots \boldsymbol{p}_{2r-4}) \prod_{i,\,k=3}^{2r-4} (a^*_{p_i}, a_{p_k}) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\boldsymbol{q}^2} - \frac{1}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2}\right] (\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{p}_2 \exp\left|-\frac{i}{\hbar}\,\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}\right| \cdot$$

$$\cdot\, n\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) n\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\left|1 - n\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right|\left|1 - n\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right| \cdot F_\lambda(E_0, E_1, \ldots, E_r)\,.$$

Here, $\varphi(\boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_{2r-4})$ is some function of the $\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \ldots, \boldsymbol{p}_{2r-4}$ as determined by the product of the H_C's except H_C^s, and $\prod_{i,k=3}^{2r-4} (a^*_{p_i}, a_{p_k})$ is the product of the operators determined by those H_C's.

Extracting from F_λ a factor $\exp\left[\beta(\Omega_0 + \sum_p n(\boldsymbol{p}))((\zeta - \varepsilon(\boldsymbol{p}))\right]$:

$$F_\lambda = \exp\left[\beta(\Omega_0 + \sum_p n(\boldsymbol{p}))(\zeta - \varepsilon(\boldsymbol{p}))\right] \cdot F_\lambda(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_r);$$

$$\eta_i \equiv E_i - \sum_p n(\boldsymbol{p})(\zeta - \varepsilon(\boldsymbol{p}))\,,$$

we can evaluate the sum over the occupation numbers and get

$$\text{const} \cdot \sum_{q} \sum_{p_1 p_2} \sum_{p_3 \cdots p_{2r-4}} \varphi(\boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_{2r-4}) \cdot \Phi(\boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_{2r-4}) \cdot \tag{20}$$

$$\cdot \left[\frac{1}{\boldsymbol{q}^2} - \frac{1}{(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)^2}\right] \cdot (\boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}))\boldsymbol{p}_2 \cdot \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\,\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}\right] \cdot$$

$$\cdot\, \Phi_1\left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right),\ \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_1 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \cdot \Phi_1\left[\varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right),\ \varepsilon\left(\boldsymbol{p}_2 + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot\, \frac{\delta_1}{\exp\left[-\beta\delta_1\right] - 1} \cdot \frac{\delta_2}{\exp\left[-\beta\delta_2\right] - 1} \cdot F_\lambda(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_r);$$

$$\left[\Phi(\boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_{2r-4}) = \left\langle \prod_{i,\,k=3}^{2r-4} (a^*_{p_i}, a_{p_k}) \right\rangle_{\text{average}}\right].$$

This expression can still be symmetrized with respect to $\boldsymbol{p}_1$ and $\boldsymbol{p}_2$, and further in the following way: Terms of the same type as (19) but with H' and H_C^s standing in different places in the sequence of matrix elements give contributions of the same form as (20) except for the values of the η_i's which depend upon the exact order in which the virtual processes happen. Calling $\mathfrak{F}_\lambda$ the sum over the F_λ of all terms with a fixed cyclus of $(r-2)$ virtual processes involving $\boldsymbol{p}_3, \ldots, \boldsymbol{p}_{2r-4}$ (energies of the states involved $= \alpha_0, \alpha_1, \ldots,$

α_{r-2}) with H_C^s and H' superimposed on variable places, we get:

$$(21)\qquad \sum_{q}\sum_{p_1p_2}\sum_{p_3\dots p_{2r-4}} \varphi(p_3,\dots,p_{2r-4})\Phi(p_3,\dots,p_{2r-4})\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{q^2}[(p_1A(q))p_2+(p_2A(q))p_1]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}qx\right]\cdot\Phi_1\left[\varepsilon\left(p_1-\frac{q}{2}\right),\ \varepsilon\left(p_2+\frac{q}{2}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\Phi_1\left[\varepsilon\left(p_2+\frac{q}{2}\right),\ \varepsilon\left(p_2-\frac{q}{2}\right)\right]\cdot\frac{\delta_1}{\exp[-\beta\delta_1]-1}\cdot\frac{\delta_2}{\exp[-\beta\delta_2]-1}\cdot$$

$$\cdot\mathfrak{F}_\lambda(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{r-2};\ \delta_1,\delta_2)\,,$$

where we have dropped the unimportant exchange term.

In the appendix it is shown that

$$\mathfrak{F}_\lambda\cdot\frac{\delta_1}{\exp[-\beta\delta_1]-1}\cdot\frac{\delta_2}{\exp[-\beta\delta_2]-1}\,,$$

remains invariant under reversal of sign of δ_1; $\delta_2, \alpha_0, \dots, \alpha_{r-2}$ remaining unchanged. As a consequence, the summand in (21) changes sign under the operation

$$p_1\to -p_1\,;\qquad p_2\to p_2,\ p_3\to p_3,\ \dots,\ p_{2r-4}\to p_{2r-4}\,,$$

and consequently the sum vanishes. This completes our proof that the Coulomb force leads to no Meissner-Ochsenfeld effect as long as the perturbation series is convergent.

4. – Generalizations.

In this section we wish to mention briefly various generalizations of the result obtained in nn. 2 and 3.

I. It is obvious from the derivation that the special form of the Coulomb force is of no importance, so that the same result applies to any (even more singular) two-body force.

II. Removal of the restriction that the particles have zero spin brings about several complications which, however, are easily seen to be of no importance.

a) The Coulomb force allows the particles to conserve their spins separately or to interchange them; the matrix elements of $H'j_0$ (as written down above) force them to conserve spins separately. The only effect of this is that the « exchange-term » of the Coulomb force in (17″) gets a different weigth-factor with respect to the $1/q^2$ term, which is of no importance to us.

b) The magnetic moments connected with the spin of the particles bring about new terms in the current density and in the Hamiltonian, viz.

$$(22)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{j}_m = cg\mu_0 \operatorname{rot}(\psi^* \boldsymbol{\sigma} \psi) \\ H'_m = -\, g\mu_0 \displaystyle\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x} (\psi^* \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{H} \psi). \end{cases}$$

It is obvious that $H'\boldsymbol{j}_0$ has now to be replaced by $H'\boldsymbol{j}_0 + H'_m\boldsymbol{j}_m$, as the cross-terms $H'_m\boldsymbol{j}_0 + H'\boldsymbol{j}_m$ vanish identically. The new terms $H'_m\boldsymbol{j}_m$ now oblige the particles to interchange their spins; as the $1/\boldsymbol{q}^2$-term in the Coulomb force does not contain spin-exchange terms, the only new contributions originate from the exchange term, and therefore again no singularity arises in the kernel.

This, again, is obviously true for any not explicitly spin-dependent two-body force in any order of perturbation theory.

III. It might be hoped that a suitably chosen many-body force could provide a model (of purely academic interest, of course) showing the Meissner-Ochsenfeld effect already in a weak-coupling approximation. By an argument similar to that of nn. 2 and 3, only much more involved, it can however be shown that (at least in first order perturbation theory) also static many-body forces never yield a singular kernel.

Appendix

Proof of the symmetry property of $\mathfrak{F}_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_{\lambda-2};\ \delta_1, \delta_2)$.

It is no loss of generality if we restrict ourselves to the case of (maximum) $r = \lambda - 2$, in view of the fact (obvious from the original definition of $\mathfrak{F}_\lambda$ and from (I 14)) that $\mathfrak{F}_\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2};\ \delta_1, \delta_2)$ can be gained out of $\mathfrak{F}_r(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-2};\ \delta_1, \delta_2)$ by differentiating $(\lambda - r)$ times with respect to suitable α's.

$\mathfrak{F}_\lambda$ is constructed as follows: Out of the series of $(\lambda - 2)$ values $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\lambda-2})$ we form the two series of $(\lambda + 1)$ values:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r,\ \alpha_r + \delta_1 + \delta_2,\ \alpha_{r+1} + \delta_1 + \delta_2, \dots,\ \alpha_{r+s} + \delta_1 + \delta_2,$$
$$\alpha_{r+s} + \delta_1,\ \alpha_{r+s+1} + \delta_1, \dots,\ \alpha_{\lambda-2} + \delta_1,\ \alpha_1 + \delta_1),$$

and

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r,\ \alpha_r + \delta_1 + \delta_2,\ \alpha_{r+1} + \delta_1 + \delta_2, \dots,\ \alpha_{r+s} + \delta_1 + \delta_2,$$
$$\alpha_{r+s} + \delta_2,\ \alpha_{r+s+1} + \delta_2, \dots,\ \alpha_{\lambda-2} + \delta_2,\ \alpha_1 + \delta_2),$$

with arbitrarily chosen «partial series lengths» $1 \leq r,\ s \leq \lambda - 2$. We then

form the λ^{th} difference quotient F_λ of the Boltzmann distribution $F_0(x) = \exp[-\beta x]$ (cf. 1 for definition) and take it at the $(\lambda+1)$ values of such a series and finally sum over all series formed with the same arguments.

We want to show that

$$\mathfrak{F}_\lambda \cdot \frac{\delta_1}{\exp[-\beta\delta_1]-1} \cdot \frac{\delta_2}{\exp[-\beta\delta_2]-1}$$

remains invariant under the substitution $\delta_1 \to -\delta_1$ with $\delta_2, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}$ remaining unchanged; or, which is the same thing, that $\mathfrak{F}_\lambda$ takes a factor $\exp[+\beta\delta_1]$ under that substitution.

For the difference quotient $F_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ of the Boltzmann distribution $F_0(x) = \exp[-\beta x]$ the following property is easily seen to hold:

$$F_n(x_0+y,\, x_1+y,\, \ldots,\, x_n+y) = \exp[-\beta y] F_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)\,. \tag{23}$$

Thus, the property of $\mathfrak{F}_\lambda$ which we wish to demonstrate can be stated in the following way:

(A) $\mathfrak{F}_\lambda$ is invariant under the following operation:

$a)$ $\delta_1 \to -\delta_1$; $\delta_2 \to \delta_2$, $\alpha_1 \to \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2} \to \alpha_{\lambda-2}$;

$b)$ $\alpha_i \to \alpha_i + \delta_1$ for $i = 1, 2, \ldots, \lambda-2$.

To show this we introduce the following notation:

Let $\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_\mu)$ be an arbitrary function of μ variables. Then by

$$\Delta_1(x \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_\mu)\,,$$

we mean the first difference quotient

$$\frac{1}{x}\Big\{\varphi(\alpha_1 + x, \ldots, \alpha_\nu + x, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_\mu) - \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_\mu)\,.$$

NB. – With this notation, we can define our difference quotients $F_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ recurrently as follows:

$$F_n(x_0, \ldots, x_n) = \Delta_1(x_i - x_k \mid x_k) F_{n-1}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,; \tag{24}$$
$$(i \neq k;\ 1 \leq i,\ k \leq n)\,.$$

We now wish to show the following identity:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2};\ \delta_1, \delta_2) &= \\ &= \Delta_1(\delta_2 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2})\Delta_1(\delta_1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}) \sum_{i=1}^{\lambda-2} F_{\lambda-2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}, \alpha_i)\,.\end{aligned} \tag{25}$$

The property (A) follows then immediately, as it is fulfilled by

$$\Delta_1(\delta_1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}) f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2})\,,$$

for any function $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\lambda-2})$.

The proof of (25) is best done by recursion using (24). We write

$$(26)\qquad \begin{cases} \Psi_\lambda \equiv \Delta_1(\delta_2 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2})\Delta_1(\delta_1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}) U_\lambda\,, \\ U_\lambda \equiv \sum\limits_{i=1}^{\lambda-2} F_{\lambda-2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}, \alpha_i)\,, \end{cases}$$

and wish to show that $\Psi_\lambda \equiv \mathfrak{F}_\lambda$ By direct calculation it is easily verified that this holds for $\lambda = 2, 3, 4$. It will therefore be sufficient to prove that Ψ_λ and $\mathfrak{F}_\lambda$ satisfy the same recursion formula. Now, (24) yields

$$(27)\qquad U_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}) = \Delta_1(\alpha_{\lambda-2} - \alpha_{\lambda-3} \mid \alpha_{\lambda-3}) U_{\lambda-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-3})\,.$$

One sees easily that

$$(27')\qquad \Delta_1(\delta_1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2})\Delta_1(\alpha_{\lambda-2} - \alpha_{\lambda-3} \mid \alpha_{\lambda-3}) U_{\lambda-1} = \\ = \Delta_1(\alpha_{\lambda-2} - \alpha_{\lambda-3}) \mid \alpha_{\lambda-3})\Delta_1(\delta_1 \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-3}) U_{\lambda-1}\,,$$

so that

$$(28)\qquad \Psi_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-2}) = \Delta_1(\alpha_{\lambda-2} - \alpha_{\lambda-3} \mid \alpha_{\lambda-3}) \Psi_{\lambda-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda-3})\,.$$

More generally (Ψ_λ being symmetrical under permutation of the α's)

$$(28')\qquad \Psi_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{\lambda-2}) = \\ = \Delta_1(\alpha_i - \alpha_k \mid \alpha_k) \Psi_{\lambda-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{\lambda-2})\,.$$

To show that $\mathfrak{F}_\lambda$ satisfies the same recursion formula (28′) we take one term of $\mathfrak{F}_{\lambda-1}$:

$$F_{\lambda-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_r + \delta_1 + \delta_2, \ldots, \alpha_{r+s} + \delta_1 + \delta_2, \alpha_{r+s} + \delta_1, \ldots, \alpha_{\lambda-3} + \delta_1, \alpha_1 + \delta_1),$$
$$[\text{or } F_{\lambda-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_r + \delta_1 + \delta_2, \ldots, \alpha_{r+s} + \delta_1 + \delta_2, \alpha_{r+s} + \delta_2, \ldots, \alpha_{\lambda-3} + \delta_2, \alpha_1 + \delta_2)]$$

and apply $\Delta_1(\alpha_i - \alpha_k \mid \alpha_k)$ to it. There are four different cases:

a) α_k is « in the interior of a partial series », i.e. it appears just once in the whole series of arguments. Then out of $F_{\lambda-1}$ we get one term F_λ with the same series of arguments as $F_{\lambda-1}$ completed by an α_i adjacent to α_k in the interior of the same sequence. This follows from the general formula

$$(29a)\qquad \Delta_1(x \mid \alpha) F_n(\alpha, x_1, \ldots, x_n) = F_{n+1}(\alpha, \alpha + x, x_1, \ldots, x_n)\,;$$

b) α_k is « on the edge of a partial series », i.e. it appears twice. Out of one $F_{\lambda-1}$ we then get two terms F_λ, one of them containing α_i twice, α_k once; the other α_i once, α_k twice. The corresponding general formula is:

$$(29b)\qquad \Delta_1(x \mid \alpha, \beta) F_n(\alpha, \beta, x_2, \ldots, x_n) = \\ = F_{n+1}(\alpha, \beta, \beta + x, x_2, \ldots, x_n) + F_{n+1}(\alpha, \alpha + x, \beta + x, x_2, \ldots, x_n)\,;$$

c) α_k « fills an entire partial series », i.e. it appears three times. By applying $\Delta_1(\alpha_i - \alpha_k \mid \alpha_k)$ we then get three terms out of $F_{\lambda-1}$: one with α_i appear-

ing three times, $\propto_k$ once; one with $\propto_k$ appearing three times, $\propto_i$ once: and one with $\propto_i$ and $\propto_k$ each appearing twice. The formula is:

$$\text{(29c)} \qquad \Delta_1(x \mid \alpha, \beta, \gamma) F_n(\alpha, \beta, \gamma, x_3, \dots, x_n) = F_{n+1}(\alpha, \beta, \gamma, \gamma + x, x_3, \dots x_n) + \\ + F_{n+1}(\alpha, \beta, \beta + x, \gamma + x, x_3, \dots, x_n) + F_{n+1}(\alpha, \alpha + x, \beta + x, \gamma + x, x_3, \dots, x_n)$$

d) $\propto_k$ appears four times. Here we get four terms out of one. However, this case need not be considered explicitly as it occurs only in $\mathfrak{F}_3$, and we start our recursion with $\mathfrak{F}_4$. It would be possible, though, to start at $\mathfrak{F}_2$, by taking this case into account too.

Thus, by (29 *a*-*c*) $\mathfrak{F}_\lambda$ satisfies the recursion formula (28′), which completes our proof of its symmetry property (A).

I am greatly indebted to Prof. W. PAULI for continuous stimulating help and many discussions.

RIASSUNTO

Utilizzando i metodi sviluppati in una precedente memoria (1) si dimostra che la forza coulombiana in un gas di particelle cariche non può produrre un effetto Meissner-Ochsenfeld fintanto che il calcolo delle perturbazioni rispetto alla interazione di Coulomb è convergente.

NOTE TECNICHE

Elementi per il calcolo di un filtro birifrangente.

L. Berti
Servizio Ricerche Officine Galileo - Firenze

(ricevuto il 15 Gennaio 1952)

Riassunto. — Recentemente si è diffuso, per usi scientifici, l'impiego di filtri birifrangenti, dopo che B. Lyot ne ha realizzato un tipo ad alta monocromaticità per lo studio del Sole. Il principio di funzionamento si basa sul fatto che una lamina di quarzo tagliata parallelamente all'asse ottico e posta fra due polaroidi a 45° con i suoi assi lento e rapido, dà luogo a fenomeni di interferenza in luce polarizzata che possono essere sfruttati per isolare particolari righe o bande spettrali, quando non sia possibile ottenere ciò con i comuni vetri. In questa nota vengono esaminati il comportamento e le caratteristiche di tali filtri. Viene inoltre illustrato un esemplare tipo Lyot costruito presso le Officine Galileo.

1. – In una lamina di quarzo tagliata parallelamente all'asse ottico esistono due direzioni privilegiate, quella dell'asse ottico e quella ad esso normale, le quali presentano due differenti indici di rifrazione e quindi due diverse velocità della luce per vibrazioni polarizzate nell'una e nell'altra direzione.

Si può rappresentare una vibrazione di ampiezza unitaria e pulsazione w che avviene lungo la bisettrice delle suddette direzioni (fig. 1), con l'espressione

$$z = \sin \omega t \,. \tag{1}$$

Si ottiene ciò ponendo un polaroid opportunamente orientato su un fascio luminoso che incide normalmente alla lamina. All'ingresso di questa le componenti la vibrazione secondo le due direzioni sono evidentemente in fase ed esprimibili mediante

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t \,.$$

All'uscita, a causa delle differenti velocità della luce, esiste invece una differenza di fase che compete allo spessore e della lamina ed ai due indici $n_1(\lambda)$

ed $n_3(\lambda)$ data da

$$\varphi = \frac{2\pi e\mu(\lambda)}{\lambda},$$

dove $\mu(\lambda) = n_1(\lambda) - n_3(\lambda)$. Le componenti la radiazione emergente dalla lamina secondo le stesse direzioni sono

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t , \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin (\omega t - \varphi) .$$

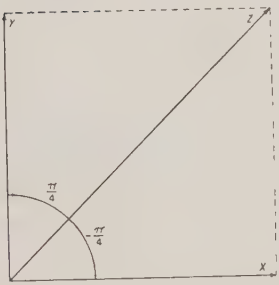


Fig. 1. – Le direzioni a cui appartengono i vettori di valori istantanei x ed y, rappresentano i due assi della lamina a cui competono gli indici di rifrazione n_1 ed n_3; z rappresenta la vibrazione emergente dal primo polaroide orientato a 45° con i suddetti assi. Sia z che i suoi componenti x ed y sono in fase tra loro.

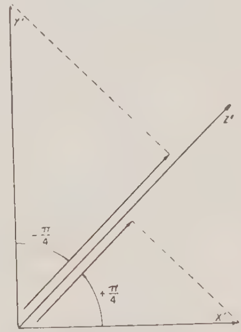


Fig. 2. – x' ed y' rappresentano la configurazione istantanea dei vettori, già x ed y, emergenti dalla lamina. I loro valori istantanei sono diversi a causa dello sfasamento introdotto dalla birifrangenza del quarzo. Avremo alla emergenza della lamina una polarizzazione generalmente ellittica; un nuovo polaroid, parallelo al primo, trasmette solo la somma z' delle componenti le x' e y' secondo la sua direzione di polarizzazione.

Un secondo polaroid parallelo al primo, permette il passaggio di una sola componente di x' ed y' e precisamente (fig. 2):

$$z'_1 = \frac{1}{2} \sin \omega t , \qquad z'_2 = \frac{1}{2} \sin (\omega t - \varphi) ,$$

che, sommandosi, danno luogo ad una vibrazione finale

$$z' = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(\omega t - \frac{\varphi}{2} \right) . \tag{2}$$

Dal confronto con la (1) segue che il fattore di trasmissione energetico del filtro per la luce incidente già polarizzata, è espresso da

$$T'(\lambda) = \cos^2 \frac{\pi e \mu(\lambda)}{\lambda} . \tag{3}$$

Esso è funzione della lunghezza d'onda ed ha degli zeri e dei massimi rispettivamente per λ_0 e λ_m dati dalle relazioni

$$\frac{e\mu(\lambda_0)}{\lambda_0} = \frac{2K_0 + 1}{2}\,, \qquad \frac{e\mu(\lambda_m)}{\lambda_m} = K_m\,, \tag{4}$$

dove K_0 e K_m sono numeri interi.

Ponendo il secondo polaroid incrociato rispetto al primo (fig. 3), delle componenti di x' ed y' passano invece

$$z_1'' = -\frac{1}{2}\sin\omega t\,,$$

$$z_2'' = \frac{1}{2}\sin(\omega t - \varphi)\,,$$

che, ricombinandosi, danno

$$z'' = -\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right),$$

a cui corrisponde un fattore di trasmissione

$$T''(\lambda) = \sin^2\frac{\pi e\mu(\lambda)}{\lambda}\,. \tag{5}$$

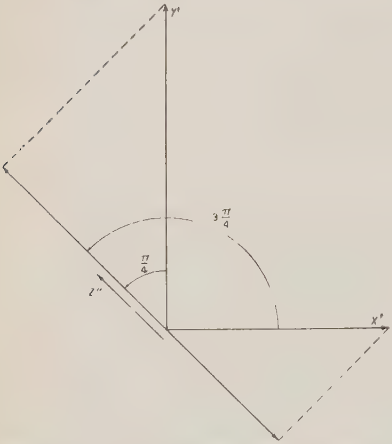


Fig. 3. – z'' rappresenta la vibrazione emergente da un polaroid posto, dopo la lamina di quarzo, perpendicolarmente con quello di entrata.

Si osserva dalla (3) e dalla (5) che le trasparenze di una stessa lamina a polaroid paralleli ed incrociati sono complementari, nel senso che si scambiano esattamente i massimi con i minimi.

Per procedere ad un rapido calcolo di un tale filtro di quarzo, osserviamo che nel campo visibile dello spettro la funzione $\mu(\lambda)$ è ben rappresentata dalla formula

$$\mu(\lambda) = 0{,}00998 - 0{,}00147\lambda\,,$$

dove λ è espresso in micron.

Le (4) prendono conseguentemente la forma

$$\lambda_0 = \frac{0{,}01996\,e}{2K_0 + 1 + 0{,}00294\,e}\,, \qquad \lambda_m = \frac{0{,}01996\,e}{2K_m + 0{,}00294\,e}\,. \tag{6}$$

Il problema per due sole lunghezze d'onda è di determinare lo spessore e due numeri interi K_0 e K_m tali da soddisfare le (6). A tale scopo è più opportuno porre il sistema (6) sotto un'altra forma ottenuta risolvendo la seconda equazione rispetto ad e ed eliminando poi la stessa e per confronto. Abbiamo così

$$\frac{2K_0 + 1}{2K_m} = \frac{F(\lambda_0)}{F(\lambda_m)}\,, \qquad e = \frac{K_m\lambda_m}{0{,}00998 - 0{,}00147\,\lambda_m}\,, \tag{7}$$

in cui

$$F(\lambda) = \frac{0{,}00998}{\lambda} - 0{,}00147\,.$$

Evidentemente è molto improbabile la soluzione matematicamente esatta della prima delle (7); tuttavia si può tollerare una certa approssimazione, avendo cura che la posizione del minimo sia corretta; ne segue solo uno spostamento del massimo che può essere tollerabile; ad ogni modo vi è sempre la possibilità di usare polaroid incrociati nel qual caso vale un sistema analogo al (7)

$$\frac{2K_m + 1}{2K_0} = \frac{F(\lambda_m)}{F(\lambda_0)}, \qquad e = \frac{K_0\lambda_0}{0{,}00998 - 0{,}00147\,\lambda_0}. \tag{8}$$

Si ricava facilmente da una qualsiasi delle (4) il numero n di bande comprese fra due lunghezze d'onda λ' e λ'', $(\lambda' > \lambda'')$, in quanto ogni minimo od ogni massimo è caratterizzato da un numero intero K_0 o K_m. Resulta

$$n = e\left[\frac{\mu(\lambda'')}{\lambda''} - \frac{\mu(\lambda')}{\lambda'}\right] = 0{,}00998\,e\left|\frac{1}{\lambda''} - \frac{1}{\lambda'}\right|. \tag{9}$$

2. – Si è diffuso recentemente, dopo lo studio completo e la realizzazione del primo esemplare ad opera di B. LYOT [1], l'impiego di questi elementi per

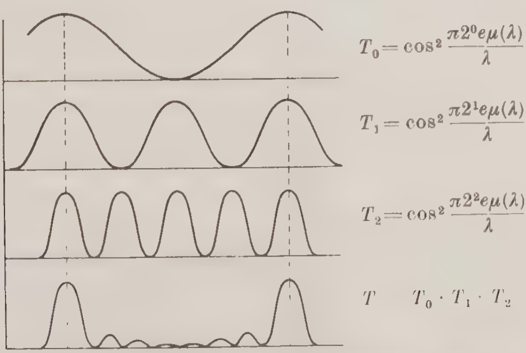


Fig. 4. – Il primo, secondo, terzo diagramma a cominciare dall'alto, rappresentano i fattori di trasmissione di tre lamine aventi spessore rispettivamente e, $2e$, $4e$. L'ultimo diagramma è la trasparenza del filtro composto.

filtri ad alta monocromaticità e luminosità con un campo angolare relativamente esteso.

Il principio di funzionamento consiste nell'usare un forte spessore di sostanza birifrangente (ad esempio, quarzo, spato); il quale forma un numero elevato di frange sottili. Una seconda lamina della stessa sostanza e di spessore esattamente uguale alla metà del precedente, del quale sfrutta il polaroid di uscita, estingue una frangia ogni due di quelle trasmesse dalla prima; proseguendo con altre lamine di spessore decrescente con la stessa legge, si otten-

---

[1] B. LYOT: *Ann. d'Astrophys.*, 7, fasc. 1-2 (1944).

gono bande sottili e sufficientemente separate da consentire l'impiego di un normale filtro di vetro. Il seguente diagramma (fig. 4) esprime il funzionamento di un filtro composto di tre elementi che opera in luce già polarizzata.

Si può dire che la lamina più spessa determina il grado di monocromaticità del complesso, mentre la più sottile stabilisce la distanza fra due bande successive.

La trasparenza di un filtro composto di p elementi, il più sottile dei quali abbia spessore e, resulta

$$T = \cos^2 \frac{2^0 \pi e \mu(\lambda)}{\lambda} \cdot \cos^2 \frac{2^1 \pi e \mu(\lambda)}{\lambda} \ldots \cos^2 \frac{2^{p-1} \pi e \mu(\lambda)}{\lambda} ,$$

che, moltiplicando e dividendo per $\sin^2 2^0 \pi e \mu(\lambda)/\lambda$ si trasforma in

$$T = \frac{\sin^2 \dfrac{2^p \pi e \mu(\lambda)}{\lambda}}{2^{2p} \sin^2 \dfrac{2^0 \pi e \mu(\lambda)}{\lambda}} ,$$

di struttura analoga a quella del reticolo di diffrazione formato da 2^p tratti trasparenti di larghezza e. Assumendo per monocromaticità del complesso la larghezza di una frangia trasmessa dall'elemento di spessore più elevato, otteniamo dalla (9) per $n = 1$ e per λ'' molto vicino a λ' in modo da poter impiegare i differenziali

$$d\lambda = \frac{\lambda}{2^{p-1} e \left| \dfrac{\partial \mu(\lambda)}{\partial \lambda} - \dfrac{\mu(\lambda)}{\lambda} \right|} \backsimeq \frac{100}{2^{p-1}} \frac{\lambda^2}{e} . \tag{10}$$

Poichè la temperatura influisce in genere e sullo spessore del quarzo e sul $\mu(\lambda)$, è necessario determinare quale variazione di temperatura è tollerabile agli effetti della stabilità del filtro. Basta imporre che l'argomento

$$\frac{2^{p-1} \pi e(t) \mu(\lambda, t)}{\lambda}$$

subisca variazioni nulle, per vedere quale spostamento $d\lambda$ subisce un determinato punto della curva di trasmissione, per esempio un massimo od un minimo. Differenziando e risolvendo si ottiene

$$d\lambda = - \frac{\dfrac{\mu(\lambda)}{e} \dfrac{de}{dt} + \dfrac{\partial \mu(\lambda)}{\partial t}}{\dfrac{\mu(\lambda)}{\lambda} - \dfrac{\partial \mu(\lambda)}{\partial \lambda}} \, dt \backsimeq - 1{,}1 \cdot 10^{-4} \lambda dt , \tag{11}$$

che determina il grado di sensibilità di un eventuale termostato quando il $d\lambda$ espresso dalla (11) sia opportunamente piccolo rispetto alla monocromaticità del filtro. Talvolta in particolari circostanze l'energia luminosa assorbita dai polaroid costituisce una continua sorgente di calore indipendente dalla termostatizzazione, e solo il loro isolamento dal quarzo assicura un funzionamento regolare.

Ugualmente legato alla monocromaticità è il campo angolare disponibile. Infatti la birifrangenza varia con l'inclinazione dei raggi luminosi rispetto all'asse della lamina; in genere per piccoli angoli di campo la birifrangenza di una lamina tagliata da un cristallo biassico perpendicolarmente all'asse medio (relativa ad un indice n_2) è data da

$$B = \frac{e\mu(\lambda)}{\lambda} + \frac{e}{2\lambda}\left[\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1 n_3}\right][n_1\xi^2 - n_3\eta^2]\,, \tag{12}$$

dove ξ e η sono i coseni direttori del fascio incidente rispetto agli assi n_1 ed n_3 [2]. Imponendo che al variare di ξ, η, λ la variazione di B sia nulla nell'intorni di $\xi = \eta = 0$, ricaviamo

$$\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1 n_3}\right][n_1\xi^2 - n_3\eta^2]\,\frac{1}{\dfrac{\mu(\lambda)}{\lambda} - \dfrac{\partial\mu(\lambda)}{\partial\lambda}}\,. \tag{13}$$

È evidente che il massimo effetto sulla monocromaticità si manifesta o per $\xi = 0$, o, separatamente, per $\eta = 0$. Per il quarzo questi due casi differiscono molto poco in modo che possiamo porre, essendo per la riga D, $n_1 = n_2 = 1{,}54424$, $n_3 = 1{,}55335$

$$|\mathrm{d}\lambda| = 21\lambda \cdot \mu(\lambda)\xi^2 \cong 0{,}2\lambda\xi^2\,. \tag{14}$$

3. – Dalla (9) si ricava immediatamente l'influsso delle variazioni di spessore $\mathrm{d}e$ sul numero n di frangie comprese fra due lunghezze d'onda

$$\mathrm{d}n = n\,\frac{\mathrm{d}e}{e}\,. \tag{15}$$

Vi è inoltre da considerare lo scorrimento di una frangia per la variazione suddetta il quale si ricava imponendo al solito che sia nullo il differenziale dell'argomento $\mu(\lambda)e/\lambda$ ottenendo così

$$\mathrm{d}\lambda = -\frac{\mathrm{d}e}{e}\,\frac{\mu(\lambda)}{\dfrac{\mu(\lambda)}{\lambda} - \dfrac{\partial\mu(\lambda)}{\partial\lambda}} \cong -\lambda\,\frac{\mathrm{d}e}{e}\,. \tag{16}$$

Se è prevista la regolazione e la termostatizzazione si può accordare tale tolleranza con l'escursione disponibile di temperatura.

Nell'accoppiamento di due lamine consecutive, aventi spessore l'una quasi doppio dell'altra, accade che invece del fattore di trasmissione complessivo

$$\cos^2\frac{\mu(\lambda)e(\pi)}{\lambda}\cos^2\frac{\mu(\lambda)2e\pi}{\lambda}\,, \tag{17}$$

si ha

$$\cos^2\frac{\mu(\lambda)(e+\mathrm{d}e)\pi}{\lambda}\cos^2\frac{\mu(\lambda)2e\pi}{\lambda}\,, \tag{18}$$

---

[2] M. E. MASCART: *Traité d'Optique*, vol. II, Cap. 10, § 449.

che, osservato ad uno spettroscopio, dà luogo ad un sistema di frange analogo ai battimenti. Supposto appropriato lo spessore $2e$, la valutazione della quantità $\mathrm{d}e$ può essere effettuata mediante il conteggio dei periodi di $\cos^2 [\mu(\lambda)(e+\mathrm{d}e)\pi/\lambda]$ contenuti in un periodo del battimento. Questo infatti è delimitato dalle λ' e λ'' per le quali la (17) uguaglia la (18). Imponendo tale uguaglianza si ricava

$$\sin\left[(2e+\mathrm{d}e)\frac{\mu(\lambda)}{\lambda}\pi+\theta\right]\sin\left[\mathrm{d}e\cdot\frac{\mu(\lambda)}{\lambda}\pi-\theta\right]=0,$$

dove θ è una costante non essenziale. La soluzione utile è nel secondo fattore che dà

$$\mathrm{d}e\,\frac{\mu(\lambda')}{\lambda'}\pi-\theta=K\pi\,,$$

$$\mathrm{d}e\,\frac{\mu(\lambda'')}{\lambda''}\pi-\theta=(K+1)\pi\,;$$

da cui per sottrazione

$$\mathrm{d}e\left[\frac{\mu(\lambda'')}{\lambda''}-\frac{\mu(\lambda')}{\lambda'}\right]=1\,. \tag{19}$$

Dalla (9) il numero di frange formate fra λ' e λ'' da una lamina di spessore $(e+\mathrm{d}e)$, tenendo conto della (19) è

$$n=\frac{e}{\mathrm{d}e}+1\,,$$

da cui il corrispondente eccesso di spessore resulta

$$\mathrm{d}e=\frac{e}{n-1}\,. \tag{20}$$

4. – Sul modello del filtro realizzato da B. Lyot, è stato costruito, alle Officine Galileo, in stretta collaborazione con l'Osservatorio Astronomico di Arcetri, un esemplare di sei lamine, la maggiore delle quali ha uno spessore di mm 71,35.

La monocromaticità, intesa nel senso convenzionale della (10) resulta nel rosso di circa 6 Å, ma in pratica l'energia luminosa si concentra per la quasi totalità in un intervallo dell'ordine di 3 Å. Il filtro è destinato principalmente allo studio del Sole nelle lunghezze d'onda

$\lambda=6573$	$\lambda=4861$	dell'Idrogeno,
$\lambda=5876$		dell'Elio,
$\lambda=5184$		del Magnesio,
$\lambda=6374$	$\lambda=5303$	della corona.

Le bande di trasmissione del filtro verranno portate su queste radiazioni variando la temperatura del complesso.

Nella fig. 5 si può osservare una parte dello spettro del Sole ottenuto con e senza filtro mediante lo spettroeliografo della torre solare di Arcetri.

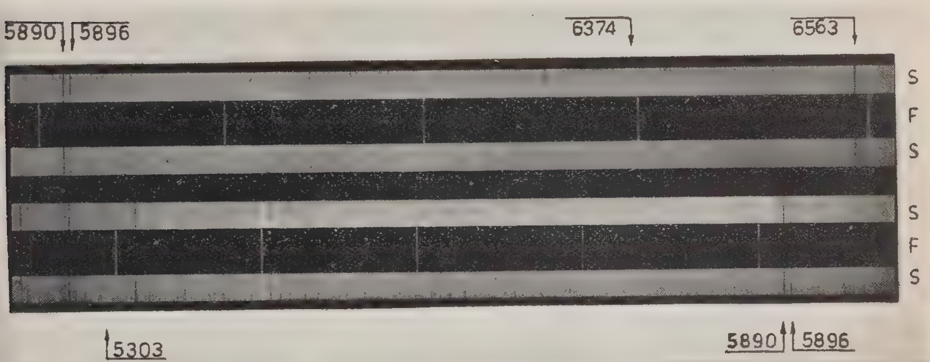


Fig. 5. – Spettro del Sole ricavato con lo spettroeliografo della torre solare di Arcetr con filtro (*F*) e senza filtro (*S*)

Desidero ringraziare vivamente il prof. ABETTI ed il prof. COLACEVICH per la collaborazione prestatami durante la realizzazione del filtro.

SUMMARY

A quartz plate, parallel to the optical axis and placed between two polaroids at 45° with its slow and fast axes, causes interferences phenomena in polarized light that may be used for obtaining filters suitable to suppress some spectral lines, when this is impossible by means of common glasses. In this paper the behaviour and the features of these filters are studied. Besides a highly monochromatic Lyot filter, built for studying the sun, is mentioned.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sugli stati isobarici dei nucleoni e la diffusione dei mesoni π contro i protoni.

B. Ferretti

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 9 Febbraio 1952)

La scoperta dei mesoni V_{01} che si disintegrano, a quanto sembra, in un protone e in un mesone probabilmente π, ha fatto sì che si ricominciasse a parlare di stati isobarici dei nucleoni [1]. Vorrei richiamare l'attenzione su una conseguenza immediata che l'esistenza di stati isobarici nel nucleone che possano essere formati per interazione diretta dei mesoni π con i nucleoni avrebbe sulla diffusione dei mesoni π stessi per urto contro i nucleoni. È chiaro innanzi tutto che questi stati isobarici darebbero luogo a una « diffusione di risonanza » dei mesoni; conseguentemente la dipendenza della sezione d'urto per diffusione dalla energia dei mesoni π potrebbe dare, viceversa, una chiara indicazione della esistenza di tali stati isobarici dei nucleoni.

Vi è un'altra conseguenza che mi sembra interessante e che si può immediatamente trarre: la esistenza degli stati isobarici che stiamo particolarmente considerando, renderebbe diversa la sezione d'urto di diffusione contro protoni dei mesoni π positivi da quella dei mesoni negativi, e non per ragioni dipendenti dalla interazione coulombiana e dal rinculo del nucleone soltanto. La ragione di una tale dissimmetria apparirà evidente se si pensa che il sistema protone-mesone negativo ha carica nulla;

---

(1) Secondo una proposta già fatta a una recente conferenza sulle particelle elementari tenuta a Bristol, si può convenire di chiamare « nucleone eccitato » ogni particella che non sia un nucleo composto e che possa disintegrarsi dando luogo, tra gli altri prodotti di disintegrazione, ad un nucleone. Un nucleone eccitato così definito è una particella che gode delle seguenti proprietà: *a*) ad ogni nucleone eccitato corrisponde un antinucleone eccitato; *b*) un nucleone eccitato non può disintegrarsi dando luogo ad un antinucleone, e reciprocamente un antinucleone eccitato non può disintegrarsi dando luogo ad un nucleone, ma ad un antinucleone; *c*) un nucleone (antinucleone) eccitato non può trasformarsi solo in particelle più leggere dei nucleoni, senza che contemporaneamente venga annichilato un antinucleone (nucleone) eccitato o no; *d*) è naturalmente proibita la trasformazione inversa di quella proibita in *c*) Tutte le proprietà *a*), *b*), *c*), *d*) discendono semplicemente dalla definizione di « nucleone eccitato » e dal fatto sperimentale della stabilità della ordinaria materia nucleare Se si ammette che il mesone V_{01} sia un nucleone eccitato, cosa che dovrebbe essere vera nel senso della definizione precedente, se è vero che si disintegra dando luogo a un protone, allora tenendo presenti le proprietà *a*), *b*), *c*), *d*), ci si può facilmente render conto del perchè non è mai stata osservata una disintegrazione del tipo V_{01} in cui venga emesso un protone negativo invece di un protone positivo.

conseguentemente esistono elementi matrice di transizione diversi da zero tra lo stato del sistema in cui si ha effettivamente un protone e un mesone negativo, a quello in cui si ha semplicemente un neutrone.

Questo ultimo stato corrisponde a un livello energetico molto basso. Il sistema protone-mesone positivo non può invece avere analoghi elementi di matrice di transizione con stati del sistema corrispondenti a livelli energetici così bassi. Ora, questa differenza che, almeno nella prima approssimazione non nulla della teoria delle perturbazioni e per nucleoni infinitamente pesanti non avrebbe prodotto una dissimmetria nello scattering dei mesoni positivi e in quello dei negativi contro protoni, sarebbe invece origine di una tale dissimmetria se esistessero gli stati isobarici nucleonici che stiamo considerando (suscettibili cioè di essere formati per interazione diretta tra mesoni e nucleoni).

Forse è prematuro dare una teoria quantitativa di questo effetto per molte ragioni, e tra le altre citerò il fatto che la teoria delle perturbazioni, almeno fermata ai primi ordini, difficilmente darebbe una approssimazione decente anche se gli stati eccitati fossero descritti in modo puramente fenomenologico, e che l'unico stato isobarico dei nucleoni che a quanto io sappia sembra sia stato osservato sperimentalmente, ossia il mesone V_{01} non ricade probabilmente, data la sua vita media molto lunga, nella classe degli stati isobarici più particolarmente presi in considerazione in questa lettera. Ritengo piuttosto che in base ai dati sperimentali sulle sezioni d'urto per diffusione dei mesoni contro i nucleoni si possano ricavare informazioni di grande interesse sulla esistenza e le proprietà degli stati isobarici dei nucleoni, e che solo dopo aver avuto tali informazioni sia sensato tentare una teoria quantitativa del fenomeno.

LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique XXX: " Réarrangements moléculaires et inversion de Walden " – Montpellier, Aprile 1951.

L'inversione di Walden è uno dei primi tipi di reazioni di trasposizione, o riordinamento molecolare, per cui da una molecola otticamente attiva, attraverso composti intermedi, si arriva come punto finale alla stessa molecola di partenza, però con attività ottica invertita, cioè al suo antipodo ottico. Dall'epoca della scoperta di WALDEN sono passati molti anni ed altri tipi di reazione sono stati trovati, per cui attraverso una serie di reazioni chimiche, o talvolta per sola azione di fattori fisici, come per esempio il calore, si ottiene un isomero della molecola di partenza. Come esempio si possono citare le reazioni di spostamento di un doppio legame o la sostituzione di un sostituente X con un sostituente Y in posto diverso da quello nel quale si trovava originariamente il sostituente X, ecc.

Il meccanismo di tali reazioni, che comportano un riordinamento degli atomi e dei legami nell'interno di una molecola o di una parte di essa senza che vari la sua composizione bruta, non è ancora conosciuta perfettamente in tutti i suoi dettagli, perchè la sua corretta interpretazione comporterebbe il corretto trattamento chimico-fisico-matematico dei legami molecolari elettronici.

Questo problema interessa profondamente anche i fisici per le informazioni che esso può dare relativamente a molte proprietà chimico-fisiche delle molecole, come per esempio la loro distribuzione elettronica, i tipi di legame, le loro energie, ecc.

Il colloquio organizzato dal « Centre National de la Recerche Scientifique » nell'Università di Montpellier ha avuto appunto come tema il riordinamento molecolare e sebbene la grande maggioranza dei convenuti appartenesse alla chimica organica, non può negarsi che i lavori ivi presentati e discussi non siano di grande interesse anche per i fisici che studiano problemi molecolari.

Al suddetto colloquio sono state presentate 29 comunicazioni scientifiche riguardanti vari tipi di riordinamenti e trasposizioni molecolari. Attraverso le comunicazioni singole e le successive discussioni, anch'esse pubblicate alla fine di ogni comunicazione, può ben dirsi che praticamente tutto il campo delle trasposizioni e dei riordinamenti molecolari sia stato esplorato sia dal lato teorico che da quello sperimentale, facendo così il punto delle nostre conoscenze odierne su questo interessantissimo tipo di reazioni chimiche.

GIULIO MILAZZO

G. ABETTI – *Keplero.* Un vol. in-24° di pag. 177. Editrice « La Scuola », Brescia, 1951.

Joannes Keplerus, come egli si firmava quando scriveva in latino, o Johann Kepler quando scriveva in tedesco, è uno dei « quattro grandi » dell'astronomia, insieme con Copernico, Galileo e Newton; ma, a differenza di questi tre, la sua figura — non meno complessa nè meno importante — non è altrettanto nota,

specialmente ai non astronomi. Quasi che gli storici della scienza abbiano sempre avuto una sorta di ritegno o di repulsione per questo grande tedesco dall'ingegno potente e dall'animo semplice e buono, che visse una vita stentata e grama, mai però invidioso delle altrui fortune, nè delle scoperte dei suoi illustri contemporanei, dei quali riconosceva anzi subito i meriti, cercando di approfittare delle nuove nozioni per il progresso della millenaria scienza dei cieli.

A breve distanza l'una dall'altra, due opere sono state recentemente pubblicate su Keplero, una in inglese (CAROLA BAUMGARDT: *Johannes Kepler* - Life and Letters. New York, Philosophical Library, 1951) e una nella nostra lingua, la presente dell'ABETTI. La quale, tuttavia, inserita com'è nella collana di « Scienziati e Tecnici » dell'Editrice « La Scuola » di Brescia, è piuttosto un semplice profilo, diretto ad un pubblico vasto e non certamente specializzato. Vale esso però — pur nella sua piccola mole — a mettere bene in luce gli aspetti caratteristici della vita e dell'opera di Keplero, inquadrandola adeguatamente nell'ambiente scientifico della sua epoca, la quale era, nientemeno, quella dei « riformatori dell'astronomia ».

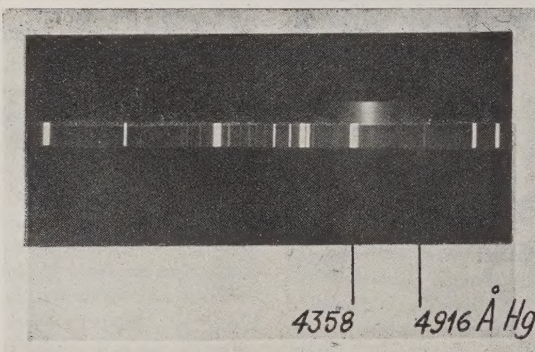
LUCIO GIALANELLA

ADDENDUM

Si voglia aggiungere all'articolo

A. Ciccone – **Luminescenza di soluzione per effetto di raggi rilevata mediante un fotomoltiplicatore 931 A**

pubblicato nel n. 1 del *Nuovo Cimento* di quest'anno, pag. 36, la seguente figura



che, per svista tipografica, fu colà omessa.

Direttore responsabile: G. POLVANI   Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 23-II-1952